Algèbre géométrique.

Introduction au théorème fondamental du calcul intégral.

Le théorème fondamental du calcul intégral, dénomination proposée par David Hestenes, est probablement l'un des aspects les plus fascinants des possibilités offertes par l'algèbre géométrique.

Nous essayons de donner dans la présente note un aperçu de cette question au lecteur novice, sans l'entraîner dans de trop rigoureuses et difficiles analyses. Le but est d'obtenir une compréhension intuitive du sujet, permettant de passer rapidement à des applications. Nous fournirons les indications bibliographiques nécessaires pour permettre un approfondissement ultérieur.

1.Définition de la dérivée vectorielle.

Considérons pour simplifier un espace euclidien R^n de dimension n, dans lequel nous définissons un système de coordonnées dont les vecteurs unitaires de base sont e_i . Un vecteur de cet espace sera donc défini par :

(1) $$x = x^i e_i$$

On pourra définir les vecteurs conjugués de e_i qui se notent e^i et satisfont aux relations :

(2) $$e_i . e^j = \delta_i^j$$

Si les e_i sont orthonormés on a $e_i = e^i$.

Soit alors $F(x)$ un multivecteur de l'algèbre géométrique associée à R^n. Dans un premier temps nous définissons la dérivée directionnelle de $F(x)$ par l'opération :

(3) $$a.\nabla F = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} [F(x + \tau a) - F(x)]$$

où τ est un paramètre numérique et a un vecteur. L'expression $a.\nabla$ est alors évidemment un opérateur de dérivation scalaire, donc ∇ doit avoir les caractéristiques algébriques d'un vecteur.

Si nous choisissons $a = e_i$ nous obtenons :

(4) $$e_i .\nabla F = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} [F(x + \tau e_i) - F(x)]$$

Le membre de droite est évidemment la dérivée partielle de F par rapport à la coordonnée x^i . Donc :

(5) $$e_i . \nabla = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$$

Nous en déduisons aisément que l'expression vectorielle de ∇ est :

(6) $$\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

et que nous avons la relation suivante, très utile :

(7) $$\nabla = e^i e_i . \nabla$$

∇, parfois noté ∂, est donc un être mathématique qui a les propriétés algébriques d'un vecteur d'algèbre géométrique, et les propriétés d'un opérateur de dérivation. Sauf mention particulière la dérivation n'est supposée opérer que sur l'élément situé immédiatement à droite de ∇. Ainsi $\nabla(FG) \neq \nabla FG$. Mais on pourra aussi définir $\dot{F}\, \dot{\nabla}\, \dot{G} \neq F \nabla G = F(\nabla G)$.

Le vecteur ∇ dit « nabla » est utilisé en analyse vectorielle ordinaire où il n'a évidemment pas du tout les mêmes propriétés, ni la même souplesse. En algèbre géométrique on a :

(8) $$\nabla F = \nabla . F + \nabla \wedge F$$

relation qui n'a pas d'équivalent en analyse classique. Il faut donc prendre garde à éviter les erreurs.

Les exemples ci-dessous sont à la fois instructifs et utiles :

$$\nabla(a.x) = e^i e_i.\nabla(a.x) = e^i \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}[a.(x+\tau e_i) - a.x] = e^i\, e_i\,.a = a$$

$$\nabla\wedge x^2 = \nabla x^2 = \nabla(x.x) = 2x$$

$$\nabla x = \nabla.x + \nabla\wedge x = n + \tfrac{1}{2}\nabla\wedge(\nabla x^2) = n + \tfrac{1}{2}\nabla\wedge\nabla\wedge x^2 = n$$

2. Définition intégrale de la dérivée vectorielle.

Appelons $d^n x$ l'élément de volume orienté (« directed content ») de l'espace R^n . Nous pouvons écrire :

(9) $$d^n x = |d^n x|\, I_n$$

où I_n est le pseudoscalaire unitaire (n-vecteur) attaché à R^n, et $|d^n x|$ le volume arithmétique de l'élément considéré. Compte tenu de nos hypothèses simplificatrices I_n est indépendant de x . De plus nous allons supposer que l'élément de volume est un « petit » cube découpé selon le système de coordonnées orthonormées choisi, de longueur d'arête τ .

Une face (i) de l'hypercube sera caractérisé par un $d_{(i)}^{n-1}x$ tel que :

(10) $$d_{(i)}^{n-1}x = \left|d_{(i)}^{n-1}x\right| I_{n-1,(i)}$$

où $I_{n-1,(i)}$ est le pseudoscalaire [(n-1)-vecteur] associé à la face (i). Si nous désignons par $N_{(i)}$ le vecteur unitaire normal à la face (i) et orienté vers l'extérieur, nous aurons les relations suivantes :

(11) $$I_{n-1,(i)} = I_n\, N_{(i)} \qquad N_{(i)} = \pm e_i$$ (pour les deux faces diagonalement opposées)

Nous posons (définition) :

(13) $$\nabla F(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{d^n x} \sum\nolimits_{\text{faces}} \int d_{(i)}^{n-1}x\, F(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{d^n x} \int_{\partial M} d^{n-1}x\, F(x)$$

où ∂M est la frontière, $(n-1)$ dimensionnelle, de M (ici le cube).

Nous obtenons donc :

(14) $$\nabla F(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{|d^n x| I_n} \sum\nolimits_{\text{faces}} \int \left|d_{(i)}^{n-1}x\right| I_{n-1,(i)}\, F(x)$$

(15) $$\nabla F(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sum\nolimits_i e^i\,[F(x+\tau e_i) - F(x)]$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\tau\, e^i\, e_i\,.\,\partial F(x) = \partial F(x)$$

Cette démonstration est un peu sommaire, mais elle permet de bien comprendre pourquoi les deux définitions de ∇F sont équivalentes.

Bien entendu la définition (13) peut et doit être rendue plus générale en considérant un voisinage quelconque de x dont on fera tendre la plus grande dimension vers zéro.

3. Théorème fondamental du calcul intégral.

Soit donc M un domaine de l'espace R^n, et ∂M sa frontière (de dimension $n-1$). Nous le découpons en éléments $d^n_{(k)}x$ indexés par k , que nous sommons doublement :

$$(16) \quad \sum_k d^n_{(k)}x \lim_{d^n_{(k)}\to 0}\frac{1}{d^n_{(k)}x}\int_{\text{faces}\,(k)} d^{n-1}x\, F(x) = \sum_k \lim_{d^n_{(k)}x\to 0}\int_{\text{faces}\,(k)} d^{n-1}x\, F(x)$$

$$= \int_{\partial M} d^{n-1}x\, F(x)$$

Mais l'expression (16) donne aussi, compte tenu de la définition (13) :

$$(17) \quad \sum_k d^n_{(k)}x \lim_{d^n_{(k)}\to 0}\frac{1}{d^n_{(k)}x}\int_{\text{faces}\,(k)} d^{n-1}x\, F(x) = \sum_k d^n_{(k)}x\, \nabla F(x) = \int_M d^n x \nabla F(x)$$

Donc, sans souci excessif de rigueur, nous avons établi le théorème fondamental du calcul intégral, qui équivaut à une dizaine de théorèmes classiques (Green, Cauchy, Gauss, Stokes, ...) :

$$(18) \qquad \int_M d^n x\, \nabla F(x) = \int_{\partial M} d^{n-1}x\; F(x)$$

Plus généralement, compte tenu de la non-commutativité des différents termes, nous obtenons :

$$(19) \qquad \int_M \dot{G}(x) d^n x\, \dot{\nabla}\dot{F}(x) = \int_{\partial M} G(x) d^{n-1}x\; F(x)$$

où la dérivation se fait à droite et à gauche, mais pas sur $d^n x$.

La simplicité de cette démonstration est la conséquence directe de la définition « intégrale » de la dérivée vectorielle. Ajoutons sans démonstration que le ce théorème est plus général, puisqu'il s'applique pour des variétés M non euclidiennes. Dans ce cas $I_n(x)$, comme $I_{n-1}(x)$ pour ∂M déjà ci-dessus, est évidemment le pseudoscalaire de l'algèbre géométrique tangente à M en x .

4. Application à la géométrie des simplexes.

Considérons un m-simplexe défini par les points $(a_0, a_1, ..., a_m)$ tels que :

$$(20) \qquad (a_0 - a_1)\wedge(a_1 - a_2)\wedge....\wedge(a_{m-1} - a_m) \neq 0$$

Cette expression est évidemment égale à :

$$(21) \qquad (a_0 - a_1)\wedge(a_0 - a_2)\wedge....\wedge(a_0 - a_m) \neq 0$$

Géométriquement on peut alors se représenter le simplexe comme une hyperpyramide de sommet a_m (par exemple) et de base définie par le simplexe $(a_0, a_1, ..., a_{m-1})$.

Pour évaluer le volume orienté de l'hyperpyramide nous procédons par emboîtements successifs à partir de a_m .

M désignant l'hyperpyramide, ∂M sa frontière $(n-1)$ dimensionnelle, on peut écrire le théorème fondamental appliqué au vecteur $(x - a_m)$:

$$(22) \qquad \int_M d^n x\, \nabla(x - a_m) = \int_{\partial M} d^{n-1}x\; (x - a_m)$$

Or :

$$(23) \qquad \nabla(x - a_m) = \nabla x = m$$

Donc :

$$(24) \qquad m\int_M d^m x = \int_{\partial M} d^{m-1}x.(x - a_m) + \int_{\partial M} d^{m-1}x \wedge (x - a_m)$$

L'examen du grade des multivecteurs permet d'écrire :

(25) $\int_{\partial M} d^{m-1}x\,.\,(x-a_m)=0$

(25 bis) $m\int_M d^m x=\int_{\partial M} d^{m-1}x\wedge(x-a_m)$

L'intégrale du second membre de l'équation (25 bis) est nulle sur les faces latérales de la pyramide de sommet a_m , puisque pour un tel x on a : $d^{m-1}x\wedge(x-a_m)=0$.

Il ne reste donc que l'intégrale sur la base définie par $(a_0, a_1, ..., a_{m-1})$. Donc :

(26) $m\int_M d^m x=\int_{\text{base}} d^{m-1}x\wedge(x-a_m)=\left(\int_{\text{base}} d^{m-1}x\right)\wedge(a_{m-1}-a_m)$

(27) $\int_M d^m x=\frac{1}{m}\left(\int_{\partial M} d^{m-1}x\right)\wedge(a_{m-1}-a_m)$

La base peut être considérée comme une hyperpyramide de sommet a_{m-1} . On peut donc répéter le même calcul et de proche en proche on trouvera :

(28) $\int_M d^m x=\frac{1}{m!}(a_0-a_1)\wedge(a_1-a_2)\wedge....\wedge(a_{m-1}-a_m)$

Si I_m est le pseudoscalaire de l'espace m-dimensionnel considéré, et V_M le volume arithmétique de l'hyperpyramide, on a :

(29) $V_M I_m=\frac{1}{m!}\left|\det\left[(a_0-a_1),(a_1-a_2),....,(a_{m-1}-a_m)\right]\right|I_m$

Donc :

(30) $V_m=\frac{1}{m!}\left|\det\left[(a_0-a_1),(a_1-a_2),....,(a_{m-1}-a_m)\right]\right|$

A partir de la formule (27) on peut aussi démontrer, si I_{m-1} est le pseudoscalaire de la base, N le vecteur unitaire perpendiculaire à la base, orienté vers l'extérieur, S_M la « surface » de la base, h_M la hauteur :

(31) $I_m=I_{m-1}\wedge N=I_{m-1}N$

(32) $V_M I_m=\frac{1}{m}S_M I_{m-1}h_M N=\frac{1}{m}S_M h_M I_M$

(33) $V_M=\frac{1}{m}h_M S_M$

Cette formule généralise celles, bien connues, du triangle et du tétraèdre.

5. Conseils de lecture.

Pour la genèse du théorème fondamental du calcul intégral il est particulièrement intéressant de se reporter aux textes suivants de David Hestenes :

– A unified language for mathematics and physics.

– Differential forms in geometric calculus.

Pour des exposés plus théoriques on consultera :

– Multivector calculus. (Hestenes)

– Multivector functions. (Hestenes)

– Simplicial calculus with geometric algebra. (Garret Sobczyk)

Un exposé particulièrement rigoureux a été rédigé par Alan Macdonald, qui donne les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions intégrées :

– The fundamental theorem of geometric calculus via a generalized Riemann integral.

G.Ringeisen (Novembre 2006).