Méthodes mathématiques comparées en électromagnétisme .

Algèbre de Gibbs -- Tenseurs -- Algèbre géométrique .

Un des aspects passionnants de l'apprentissage de l'algèbre géométrique (GA) est qu'il permet dans beaucoup de domaines de percevoir les insuffisances des méthodes classiques. Le nouvel éclairage fait apparaître des lacunes de compréhension dont on n'avait auparavant jamais pris conscience. Je pense que ceci est particulièrement frappant dans le domaine de l'électromagnétisme, qui est une science bien moins intuitive que la mécanique classique. C'est ainsi par exemple qu'en examinant le passage des équations de Maxwell à leur expression tensorielle je me suis rendu compte du fait que le choix des signes des différents éléments nécessitait un examen très précis des variances, souvent escamoté dans les présentations, et que la GA apportait dans ce domaine une évidente simplification.

Commençons donc par écrire les équations de Maxwell sous leur forme usuelle tridimensionnelle. Nous les considérons en unités naturelles ($\mu_0 = \varepsilon_0 = c = 1$). On a :

$$(1)\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \rho & \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\,\partial_t \boldsymbol{B} & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \partial_t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{\nabla}\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t & \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \end{cases}$$

Les deux premières lignes représentent les équations de Maxwell proprement dites, la troisième les potentiels scalaire et vecteur des champs.

Nous avons noté en caractères gras et majuscules les différents vecteurs tridimensionnels, ce qui est fort heureusement en accord avec leur caractère bivectoriel, qui apparaîtra dans l'espace-temps Minkowskien, en calcul tensoriel et encore plus précisément en GA.[1]

Rien dans cette présentation, si ce n'est la présence latente de la vitesse de la lumière, ne laisse deviner le caractère spécifiquement relativiste de ces équations. Cependant, comme l'on sait, la constatation de leur non invariance dans les transformations galiléennes a joué un rôle essentiel dans la découverte de la relativité.

La présentation du sujet en calcul tensoriel nécessite que soient faits quelques choix et rappels préliminaires. Je prends comme textes de référence d'une part le cours de Feynman [1], volontairement élémentaire (en ce qui concerne les mathématiques bien sûr ... !), et à un niveau plus élevé le cours de Physique (théorie des champs) de Landau/Lifschitz [2].

Tout se passe bien entendu en espace quadridimensionnel de Minkowski, avec le choix de la métrique (+ , − , − , −). On y parle de *quadrivecteurs*, c'est à dire de vrais vecteurs, à ne pas confondre avec le *multivecteur* I, pseudoscalaire en GA. Le produit scalaire de deux vecteurs a, b s'écrit donc :

$$(2)\qquad a.b = a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_i b^i \qquad \mu = (0,1,2,3) \qquad i = (1,2,3) \qquad a_0 = a^0 \qquad b_i = -\,b^i$$

Dans [2] on exprime un quadrivecteur **contravariant** (A^α) sous la forme symbolique :

$$(3)\qquad (A^\alpha) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \boldsymbol{A})$$

en convenant de toujours résumer par $+\boldsymbol{A}$, en caractères gras, la forme **contravariante** des coordonnées d'espace.

On est alors conduit à appeler $-\boldsymbol{B}$ la forme **covariante** (B_α) d'un quadrivecteur : [2]

1. On peut ajouter indépendemment de toute considération relativiste que les équations (1) souffrent des défauts connus de l'algèbre de Gibbs, dès lors qu'interviennent des produits vectoriels.

2. Vu à la lumière de la GA tout ceci n'est à vrai dire pas très satisfaisant : un vecteur est un vecteur tout simplement, sans que l'on ait besoin de préciser dans quel type de coordonnées on l'examine. La notation symbolique adoptée ici pour les quadrivecteurs n'est qu'un artifice de présentation, alors qu'en GA elle traduit une réalité géométrique exprimable algébriquement de manière non ambiguë. Il est d'ailleurs vivement recommandé de vérifier toutes les formules à l'aide des notations tensorielles détaillées. L'utilisation directe des expressions (3),(4) et (7) dans des calculs algébriques expose à des erreurs de signe difficiles à détecter.

(4) $(B_\alpha) = (B_0, B_1, B_2, B_3) = (B^0, -B^1, -B^2, -B^3) = (B_0, -\boldsymbol{B})$

De la sorte, le produit contracté $A^\alpha B_\alpha$ devient :

(5) $A^\alpha B_\alpha = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3 = A_0B_0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = A_0B_0 - \boldsymbol{A.B}$

Le passage entre coordonnées covariantes et contravariantes se fait par l'intermédiaire des tenseurs métriques $\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ qui sont ici égaux et diagonaux $(+1, -1, -1, -1)$.

(6) $A_\alpha = A^\beta \eta_{\alpha\beta} \qquad A^\beta = A_\alpha \eta^{\alpha\beta}$

On peut montrer que les trois types de contractions envisageables entre deux vecteurs de variance identique ou différente se résument en la même expression $A_0B_0 - \boldsymbol{A.B}$. [3]

Le quadrivecteur covariant (∇_α) s'écrit donc logiquement, en espace de Minkowski :

(7) $(\nabla_\alpha) = (\partial_0\,, \partial_1\,, \partial_2\,, \partial_3) = (\partial_t, -\boldsymbol{\nabla}) \qquad (\partial_i = \partial/\partial x^i)$

où $+\boldsymbol{\nabla}$ représente les éléments **contravariants** $(\partial/\partial x_i)$, peu employés . Pour la contraction $(\nabla_\alpha).(A_\alpha)$ on peut donc écrire : [4]

(8) $\nabla_\alpha A_\beta \eta^{\alpha\beta} = (\partial_0\,, -\boldsymbol{\nabla}).(A_0\,, -\boldsymbol{A}) = \partial_0 A_0 - (-\boldsymbol{\nabla}).(-\boldsymbol{A}) = \partial_0 A_0 + \partial_i A_j \eta^{ij} = \partial_0 A_0 + \partial_i A^i$

En électromagnétisme on a l'habitude de désigner par A le quadrivecteur potentiel, par φ sa coordonnée temporelle (potentiel scalaire), par $\boldsymbol{A}$ le vecteur correspondant aux coordonnées spatiales (potentiel vectoriel).

On peut montrer alors, par des arguments variationnels, que l'on peut obtenir les équations de Maxwell en écriture tensorielle :

(7) $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,\partial F_{\mu\nu}/\partial x^\beta = 0 \qquad \partial F^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = -j^\alpha$

avec :

(8) $F_{\alpha\beta} = \partial A_\beta/\partial x^\alpha - \partial A_\alpha/\partial x^\beta$

Dans [1] et [2] les tenseurs électromagnétiques s'écrivent comme suit :

(9) $$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(10) $$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

3. Le piège réside dans le signe intermédiaire :

$$A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta} = (A^0, \boldsymbol{A}).(B_0, \boldsymbol{B}) = A_0B_0 - \boldsymbol{A.B}$$

$$A^\alpha B_\alpha = (A^0, \boldsymbol{A}).(B_0, -\boldsymbol{B}) = A_0B_0 + \boldsymbol{A.}(-\boldsymbol{B})$$

$$A_\alpha B_\beta \eta^{\alpha\beta} = (A^0, -\boldsymbol{A}).(B_0, -\boldsymbol{B}) = A_0B_0 - (-\boldsymbol{A})\boldsymbol{.}(-\boldsymbol{B})$$

4. En anticipant sur la suite de l'exposé il est intéressant , et rassurant, de noter que l'on obtient le même résultat en GA. En effet :

$$\nabla.A = <\nabla\gamma_0\gamma_0 A> = (\partial_0 - \boldsymbol{\nabla}).(A_0 - \boldsymbol{A}) = \partial_0 A_0 + \boldsymbol{\nabla.A} = \partial_0 A_0 + \partial_i A^i$$

Dans ces expressions on a, par définition, $\boldsymbol{\nabla} = \sum \partial_i \sigma_i = \sum \gamma_i\gamma_0\,\partial_i = -\gamma^i\gamma_0\,\partial_i$, ce qui assure la cohérence avec le calcul tensoriel. Il est très instructif de regarder cela en détail; on s'apercevra que les possibilités d'erreur de signe sont nombreuses. Remarque utile : se rappeler que A^i est associé à γ_i et non pas à σ_i pour le signe en cas de changement de variance, donc $A^i = \eta^{ik} A_k$ et non pas $A^i = \delta^{ik} A_k$.

Je ne sais pas qui a inventé la notation symbolique utilisée dans [2], toujours est-il que les très éminents auteurs côtoyaient sans le savoir la GA et — propos impertinent — seraient peut-être aujourd'hui plus réceptifs à ce merveilleux outil que la communauté physicienne actuelle.

Ce sont ces tableaux que Feynman montre à ses élèves débutants, sans trop s'encombrer de mathématiques, en leur faisant remarquer que E_x est une chose en tx , mais que B_z est une chose en yx ! Nous voyons donc apparaître l'idée que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ ne sont pas des vecteurs de même nature, ce qui est implicite dans les équations (1) de Maxwell, mais sans explication géométrique évidente.

Cette présentation traditionnelle, en E_x , B_x , etc ..., du tenseur électromagnétique, doit permettre de faire le lien entre les équations vectorielles (1) et la méthode purement tensorielle. Elle comporte toutefois de sérieux inconvénients, car ces appellations simplifiées font disparaître toute notion de variance. On ne peut impunément remplacer un terme deux fois covariant en espace-temps par une composante d'un vecteur de l'espace physique réel. De ce fait la nature et le signe des différents éléments sont rien moins qu'intuitifs, et doivent être établis terme à terme, par exemple à l'aide de la définition (8), ou bien en écrivant dans les deux langages -- vecteurs et tenseurs -- la force électromagnétique. Il y a en outre une difficulté certaine de mémorisation compte tenu des différentes conventions coexistant dans la littérature.

Pour le bien-être du lecteur soyons plus précis. On peut écrire :

(11) $$F_{01} = \partial A_1/\partial t - \partial A_0/\partial x = -\,\partial A^1/\partial t - \partial\varphi/\partial x = E_x \ , \quad \text{etc ....}$$

ce qui correspond bien à :

(12) $$\boldsymbol{E} = -\,\partial \boldsymbol{A}/\partial t - \boldsymbol{\nabla}\varphi$$

De même :

(13) $$F_{12} = \partial A_2/\partial x - \partial A_1/\partial y = \partial A^1/\partial y - \partial A^2/\partial x = -\,B_z$$

correspondant à :

(14) $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Rappelons pour être complet que la force de Lorentz par unité de charge, est donnée respectivement par :

(15) $$d\boldsymbol{p}/dt = d(m\boldsymbol{v})/dt = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad\qquad m_0\, du^\alpha/d\tau = F^{\alpha\beta} u_\beta$$

où τ est le temps propre de la particule.

Tout ceci va devenir, du moins je l'espère, beaucoup plus clair en algèbre géométrique. A cet effet je me suis référé d'une part au remarquable ouvrage de Doran et Lasenby [3], ainsi qu'à un article très éclairant de David Hestenes [4]. Cependant quelques rappels sont nécessaires.

En GA les vecteurs de l'espace de Minkowski s'écrivent :

(16) $$x = x^0\,\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\,\gamma_3 \qquad \text{avec} \qquad \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

Les vecteurs réciproques des γ_μ sont :

(17) $$\gamma^0 = \gamma_0 \qquad \gamma^i = -\,\gamma_i$$

En prenant toujours $c = 1$ et en notant $x^0 = t$, on introduit la notion projective de spacetime split qui s'écrit :

(18) $$x\gamma_0 = t + \boldsymbol{x}$$

c'est à dire :

(19) $$\left\{\begin{array}{lll} x.\gamma_0 + x \wedge \gamma_0 = t + \boldsymbol{x} & & \\ x.\gamma_0 = t & x \wedge \gamma_0 = \boldsymbol{x} \ \ (\text{vecteur relatif}) & \\ \gamma_i \wedge \gamma_0 = \gamma_i\gamma_0 = \boldsymbol{\sigma_i} & \boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{\sigma_i} & \sigma_i\,.\,\sigma_j = \delta_{ij} \end{array}\right.$$

Chaque observateur, caractérisé par *son* γ_0 , voit donc un ensemble tridimensionnel de vecteurs relatifs, dans *son espace propre*. Ces vecteurs relatifs, qui sont des bivecteurs de l'espace-temps, forment un espace euclidien. On montre facilement que le pseudoscalaire I est le même dans l'espace-temps et l'espace relatif. On retrouve immédiatement :

(20) $$x^2 = x\gamma_0\gamma_0 x = (x.\gamma_0 + x\wedge\gamma_0)(x.\gamma_0 + \gamma_0\wedge x) = (t+\boldsymbol{x})(t-\boldsymbol{x}) = t^2 - \boldsymbol{x}^2$$

démontrant ainsi à nouveau que l'intervalle d'espace-temps est le même pour tous les observateurs.

Les équations de Maxwell peuvent alors s'écrire, en unités naturelles :

(21) $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \rho \implies \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \rho$ *(scalaire)*

(22) $\partial_t\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{J} \implies \partial_t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}.(I\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{J}$ *(vecteur)*

(23) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \partial_t\boldsymbol{B} = 0 \implies \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E} + \partial_t(I\boldsymbol{B}) = 0$ *(bivecteur)*

(24) $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = 0 \implies \boldsymbol{\nabla}\wedge(I\boldsymbol{B}) = 0$ *(pseudoscalaire)*

où $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{J}$ sont des bivecteurs STA construits par hypothèse sur une base $\gamma_i\gamma_0 = \boldsymbol{\sigma_i}$, et donc des vecteurs relatifs d'espace ; $(I\boldsymbol{B})$ est aussi un bivecteur STA, mais un bivecteur relatif d'espace (ceci correspond au caractère axial de $\boldsymbol{B}$ en formulation conventionnelle, qui se traduit en GA par le fait que $I\boldsymbol{B}$ ne comprend que des termes de type $\gamma_i\gamma_j$).

L'opérateur différentiel $\boldsymbol{\nabla}$ est aussi un vecteur d'espace et un bivecteur STA. En effet :

(25) $$\nabla = \gamma^0\partial_t + \gamma^i\partial_i \qquad \nabla\gamma^0 = \partial_t + \gamma^i\gamma^0\partial_i = \partial_t - \Sigma\sigma_i\partial_i = \partial_t - \boldsymbol{\nabla}$$

On remarque que l'on peut regrouper la densité de charge ρ et le courant de charge $\boldsymbol{J}$ en un seul courant de charge d'espace-temps J, par :

(26) $$\gamma_0 J = \gamma_0 .J + \gamma_0\wedge J = \rho - \boldsymbol{J}$$

Les quatre équations de Maxwell se regroupent alors en une seule :

(27) $$(\partial_t + \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) = \rho - \boldsymbol{J} \implies \nabla F = J$$

On peut noter que $F = \boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}$ est un bivecteur de STA et la somme d'un vecteur et d'un bivecteur dans l'espace relatif obtenu par spacetime split γ_0 . Le fait que que la séparation entre vecteur électrique et vecteur (axial) magnétique dépende de γ_0 , c'est à dire du mouvement de l'observateur, est clairement mis en évidence par les formules suivantes :

(28) $$\boldsymbol{E} = \tfrac{1}{2}(F - F^\dagger) = \tfrac{1}{2}(F - \gamma_0 F\gamma_0) \qquad I\boldsymbol{B} = \tfrac{1}{2}(F + F^\dagger) = \tfrac{1}{2}(F + \gamma_0 F\gamma_0)$$

Dans son article [4] David Hestenes a sans doute été le premier à faire remarquer :

-- d'une part qu'en GA le champ magnétique est correctement représenté par $I\boldsymbol{B}$ et non par son dual $\boldsymbol{B}$;

-- d'autre part que la formulation $F = \boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}$ de l'ensemble du champ électromagnétique apporte enfin une explication géométrique limpide à la constatation que l'on peut en algèbre vectorielle de Gibbs simplifier l'expression des équations de Maxwell en combinant $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ en une expression *complexe* $F = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}$. Le remplacement de l'être abstrait i par le très concret pseudoscalaire I change tout.

Parmi les formules remarquables figurant dans cet article je ne résiste pas à la tentation de citer, pour la propagation d'une onde plane monochromatique, polarisée circulairement à droite :

(29) $$\hat{\boldsymbol{E}}\hat{\boldsymbol{B}}\hat{k} = I$$

traduisant algébriquement le caractère *direct* du trièdre formé par les trois vecteurs. Même le plus paresseux des étudiants ne saurait oublier cela !

Rappelons enfin que l'équation (27) est intéressante non seulement par son étonnante simplicité, mais surtout parce que grâce aux propriétés du produit géométrique elle peut être inversée sous la forme d'une fonction de Green (opérateur intégral) :

(29) $\nabla F = J \qquad \Longleftrightarrow \qquad F = \nabla^{-1} J$

De plus, en introduisant un potentiel vecteur A auquel nous imposons la condition de Lorentz $\nabla . A = 0$ nous obtenons l'équation d'onde de l'électromagnétisme : [5] [6]

(30) $F = \nabla \wedge A = \nabla A \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla F = \nabla^2 A = J$

Le lecteur attentif n'aura pas manqué d'observer que si les $\boldsymbol{\sigma_i}$ satisfont aux relations des matrices de Pauli, les γ_α satisfont eux aux relations matricielles de Dirac. Quoi de plus logique dans l'étude des champs électromagnétiques, située naturellement en une zone de convergence de la relativité et de la mécanique quantique.

G.Ringeisen

Mai 2009 (Révisé Juillet 2009)

[1] Le Cours de Physique de Feynman (Electromagnetism)

[2] Physique théorique -- Theorie des Champs L.Landau/E.Lifschitz

[3] Geometric Algebra for Physicists Doran/Lasenby

[4] Vectors, Spinors, and complex Numbers in Classical and Quantum Physics D.Hestenes

5. Le lecteur se rendra encore mieux compte de la souplesse et de la puissance de calcul offerte par le produit géométrique, pierre angulaire de la GA, en vérifiant, à l'envers, de la manière suivante la définition des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$:

$$F = \nabla A = \nabla \gamma_0 \, \gamma_0 \, A = (\partial_0 - \boldsymbol{\nabla})(A^0 - \boldsymbol{A}) = \partial_0 A^0 - \partial_0 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A^0 + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{A} = \partial_0 A^0 + \boldsymbol{\nabla . A} - \partial_0 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A^0 + \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}$$

Soit :

$$\partial_0 A^0 + \boldsymbol{\nabla . A} = \nabla . A = 0 \qquad \boldsymbol{E} = -\,\partial_0 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A^0 \qquad I\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A} = I \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \qquad F = \boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}$$

où la structure des équations s'impose avec une rare évidence.

6. Bien que cette analyse dépasse l'objectif initialement fixé pour cet article, il est intéressant enfin de montrer comment se présente en GA le cheminement conduisant à la définition moderne du bivecteur électromagnétique F à partir des définitions de base, c'est à dire d'une intégrale d'action.

Pour plus de clarté nous réintroduisons explicitement la vitesse c de la lumière. Avec les notations de [2] l'intégrale d'action s'écrit :

$$S = \int L\,dt = -\int_a^b \; (m c\, ds + \tfrac{e}{c} A.dx) = -\int_a^b \; [m c (dx.dx)^{1/2} + \tfrac{e}{c} A.dx]$$

où le signe moins nous assure que l'intégrale est effectivement minimale le long de la ligne d'univers parcourue par le système. La condition nécessaire et suffisante est donc $\delta S = 0$. Nous obtenons :

$$-\,\delta S = \int_a^b \; \{m c v.(d\delta x) + \tfrac{e}{c} A.(d\delta x) + \tfrac{e}{c} \delta A.dx\} \qquad (v = \tfrac{dx}{ds})$$

qui donne, après intégration par parties des deux premiers termes :

$$-\,\delta S = \int_a^b \; \{m c \tfrac{dv}{ds} . \delta x + \tfrac{e}{c} v.\nabla A.\delta x - \tfrac{e}{c} \delta x.\nabla A.v\} ds$$

On doit donc avoir,puisque δx est libre, sauf en a et b :

$$m c \tfrac{dv}{ds} . \delta x = -\,\tfrac{e}{c} v.\nabla A.\delta x + \tfrac{e}{c} \delta x.\nabla A.v = \tfrac{e}{c} [(\nabla \wedge A).v].\delta x$$

$$m c \tfrac{dv}{ds} = \tfrac{e}{c} [(\nabla \wedge A).v] = \tfrac{e}{c} F.v$$

$$F = \nabla \wedge A$$