Equations vectorielles. **Exemples comparés.**

I. Un exemple simple.

Résoudre l'équation :

(1) $\alpha x + b \times x = a$

où a, b, x sont des vecteurs de R^3, et α un scalaire.

Traduisons (1) en GA (algèbre géométrique) et multiplions par le pseudoscalaire i :

(1bis) $\alpha x - i\, b \wedge x = a$

(1ter) $i\alpha x + b \wedge x = i\, a$

En multipliant par $\wedge b$ on obtient :

(2) $\alpha(i\,x) \wedge b + 0 = (i\,a) \wedge b$

(2bis) $\alpha\, i\, x.b = i\, a.b$

(2ter) $x.b = \alpha^{-1} a.b$

D'autre part l'équation (1ter) peut être transformée en :

(3) $\alpha i\, x + b x - b.x = i\, a$

Donc :

(4) $(\alpha i + b)x = i\, a + \alpha^{-1} a.b$

(5) $x = (\alpha i + b)^{-1}(i\, a + \alpha^{-1} a.b)$

(5bis) $x = (\alpha^2 + b^2)^{-1}(-\alpha i + b)(i\, a + \alpha^{-1} a.b)$

(5ter) $x = (\alpha^2 + b^2)^{-1}(\alpha a + \alpha^{-1} b\, a.b + i\, b \wedge a)$

(6) $x = (\alpha^2 + b^2)^{-1}(\alpha a + \alpha^{-1} b\, a.b + a \times b)$

Le vecteur solution x est donc décomposé en trois vecteurs colinéaires avec, respectivement, a , b , $a \times b$ (orthogonal aux deux précédents).

En algèbre de Gibbs, en multipliant scalairement l'équation (1) par le vecteur b nous obtenons la relation (2ter), qui ne nous est pas cependant d'une grande utilité car l'équivalent de la relation (3) n'existe pas. Nous devons donc trouver une autre idée. On peut bien sûr poser a priori :

(7) $x = \mu\, a + \nu b + \tau a \times b$

mais il faut bien reconnaître que ceci nous a été inspiré par le résultat déjà connu ! Il n'y a pas de raison pour que dans un cas plus général un système d'axes particulier s'impose de manière évidente.

Il suffit alors d'effectuer les opérations vectorielles et d'annuler les coefficients des trois vecteurs pour obtenir des relations donnant μ, ν, τ, et donc la relation (6).

Avec l'artillerie lourde du calcul tensoriel on traduit, par définition, l'équation (1) dans un système de coordonnées orthonormées a priori quelconque :

(8) $\alpha x^i e_i + \varepsilon_{ijk} b^i x^j e^k = a^i e_i$

(8bis) $\alpha x^i \delta_{ik} e^k + \varepsilon_{ijk} b^i x^j e^k = a^i \delta_{ik} e^k$

(9) $\alpha\delta_{ik}x^i + \varepsilon_{jik}b^j x^i = a^i\delta_{ik} = a_k$

(10) $(\alpha\delta_{ik} + \varepsilon_{jik}b^j)x^i = a_k$

Ceci est une relation matricielle du type :

(11) $Ax = a$

dont la solution est :

(12) $x = A^{-1}a$

Le problème est en principe résolu, mais le calcul de $A^{-1}a$ à partir d'une expression littérale de A est plutôt fastidieux (calcul de dix déterminants à combiner sans erreur). Le résultat final exprimé en termes de coordonnées permet dans ce cas simple de recomposer l'équation (6).

Sur cet exemple précis il apparaît donc clairement que la méthode à la fois la plus élégante, la plus efficace et la plus simple est celle faisant appel à l'algèbre géométrique.

II. Un deuxième exemple simple.

Résoudre l'équation :

(13) $\alpha x + b c.x = a$

où $a, b, c, x,$ sont des vecteurs de R^3 et α un scalaire.

Multiplions scalairement par c :

$$\alpha c.x + c.b\, c.x = c.a$$

$$(\alpha + c.b)c.x = c.a$$

(14) $c.x = (\alpha + c.b)^{-1}\, c.a$ (si $\alpha + c.b \neq 0$)

D'où en reportant dans (13) :

$$\alpha x + b(\alpha + c.b)^{-1}c.a = a$$

(15) $x = \alpha^{-1}[a - b(\alpha + c.b)^{-1}]$

Dans le cas où $\alpha + c.b = 0,$ il y a zéro solutions si $a.c \neq 0$, ou bien une infinité de solutions

$$x = \alpha^{-1}a + \lambda b \qquad (\lambda \text{ quelconque})$$

Compte tenu du fait que cet exemple ne fait intervenir que des produits scalaires il ne diffère pas du calcul en algèbre de Gibbs. Notons que l'on peut dès la première étape écrire :

$$\alpha x \wedge b = a \wedge b$$

ce qui montre immédiatement que x est dans le plan défini par $a \wedge b$.

L'équation tensorielle s'écrit tous calculs faits :

(16) $(\alpha\delta^{im} + b^i c^m)x_m = a^i$

Malgré sa simplicité, l'observation faite précédemment au sujet de sa résolution théorique et pratique reste valable.

III. Quelques complications.

Essayons maintenant de résoudre l'équation :

(17) $$\alpha x + B.x = a$$

où B est un bivecteur. Il est inutile de penser à l'algèbre de Gibbs où cette notion n'existe pas. On peut en revanche considérer $B.x$ comme la contraction d'un tenseur antisymétrique avec un vecteur, ce qui conduit à la relation :

(18) $$(\alpha \delta^{ij} + B^{ij}) x_j = a^i \qquad B^{ij} = -B^{ji}$$

avec toujours la même remarque pratique.

Multiplions (17) par i puis par $(iB)\wedge$:

$$\alpha i x + i B.x = i a$$

$$\alpha i x + (iB)\wedge x = i a$$

$$\alpha (iB)\wedge (ix) = (iB)\wedge (ia)$$

(19) $$B \wedge x = \alpha^{-1} B \wedge a$$

En additionnant (17) et (19), et en notant que B^2 est négatif, on obtient :

(20) $$(\alpha + B) x = a + \alpha^{-1} B \wedge a$$

(21) $$x = (\alpha + B)^{-1}(a + \alpha^{-1} B \wedge a)$$

$$= (\alpha^2 - B^2)^{-1}[(\alpha - \alpha^{-1} B^2) a + (\alpha^{-1} - 1) B.a]$$

expression qui représente bien un vecteur. Le premier terme est colinéaire avec a , le second colinéaire avec un vecteur obtenu par projection de a sur le plan défini par B , suivie d'une rotation-dilatation dans ce plan. Est-il nécessaire de préciser que cette interprétation géométrique reste profondément masquée dans le calcul tensoriel ?

Une équation encore un peu plus compliquée associe x , $.x$, $\times x$ sous la forme :

(22) $$\alpha x + b c.x + d \times x = a$$

soit :

(23) $$\alpha i x + i b c.x + d \wedge x = i a$$

(24) $$(\alpha i + d) x + i b c.x - d.x = i a$$

En multipliant (23) par $d\wedge$ on obtient :

$$\alpha i d.x + i d.b\, c.x = i d.a$$

(25) $$d.x = \alpha^{-1} d.a - \alpha^{-1} d.b\, c.x$$

En reprenant (24) :

$$(\alpha i + d) x + (i b + \alpha^{-1} d.b) c.x = i a + \alpha^{-1} d.a$$

(26) $$x + (\alpha i + d)^{-1}(i b + \alpha^{-1} d.b) c.x = (i a + d)^{-1}(i a + \alpha^{-1} d.a)$$

Pour simplifier appelons e et f les vecteurs :

(27) $$e = (\alpha i + d)^{-1}(i b + \alpha^{-1} d.b) = (\alpha^2 + d^2)^{-1}(\alpha b - d \times b + \alpha^{-1} d.b\, d)$$

(28) $$f = (\alpha i + d)^{-1}(i a + \alpha^{-1} d.a) = (\alpha^2 + d^2)^{-1}(\alpha a - d \times a + \alpha^{-1} d.a\, d)$$

On obtient donc :

(29) $x + e\,c.x = f$

(30) $(1 + c.e)c.x = c.f$

(31) $x = f - e(1 + c.e)^{-1}c.f$ si $1 + c.e \neq 0$

Notons que la forme tensorielle de l'équation (22) est :

(32) $(\alpha\delta_{ik} + b_k c_i + \varepsilon_{jik} d^j)x^i = a_k$

Dans les équations (27), (28), (31), nous remarquons que le vecteur a ne figure que dans f et $f.c$, linéairement bien sûr, et qu'il devrait donc pouvoir être factorisé dans une formulation matricielle.

Nous pouvons écrire :

(33) $x^i = x.e^i = f.e^i - e.e^i(1 + c.e)^{-1}c.f$

(34) $\varphi(y) = (\alpha^2 + d^2)^{-1}(\alpha y - y \times d + \alpha^{-1}dd.y)$

(35) $f.e^i = \varphi(e^i).a$

(36) $c.f = \varphi(c).a$

Donc :

(37) $x^i = [\varphi(e^i) - e.e^i(1 + c.e)^{-1}\varphi(c)].e^k a_k$

Ceci veut donc dire que l'inverse de la matrice :

(38) $A = \| \alpha\delta_{ik} + b_k c_i + \varepsilon_{jik} d^j \|$

est la matrice :

(39) $A^{-1} = \| [\varphi(e^i) - e.e^i(1 + c.e)^{-1}\varphi(c)].e^k \|$

où φ est défini par (34).

Comme nous disposons de 3x3+1=10 paramètres pour calculer les 9 composantes de la matrice réelle (3,3), on peut penser que l'algèbre géométrique nous fournit le moyen d'inverser sans douleur, littéralement, toutes les matrices non singulières de ce type. Notre satisfaction doit toutefois être tempérée par le fait que cette élégante méthode n'a d'intérêt pratique que si nous connaissons a priori la structure (38) de la matrice A .... . Mais ceci est une bonne illustration de la puissance de l'algèbre géométrique par comparaison avec les méthodes usuelles.

G.Ringeisen

Février 2007