Comparaison des principaux outils mathématiques pour la physique.

Dans la présente note nous nous fixons comme objectif de comparer différents outils mathématiques utiles pour la physique, sur la base d'un exemple concret, celui du flux d'un champ vectoriel à travers une surface de $\mathbb{R}^3$. Nous examinerons plus particulièrement le cas d'une surface sphérique. Ceci revient bien sûr pour certaines méthodes à utiliser un marteau pilon pour écraser une mouche, mais ce qui nous intéresse ici c'est d'illustrer de manière simple les différences entre les méthodes, et les pièges de compréhension ou d'application à éviter. Nous donnerons ensuite quelques brèves indications sur la généralisation de tout ceci à des espaces de dimension plus élevée.

1/ L'outil tensoriel.

On considère un nouveau système de coordonnées u , curvilignes, telles que la surface soit définie par $u^3=0$. Dans les cas pratiques on choisit toujours des coordonnées localement orthogonales, mais ce n'est pas une obligation.

Le *vecteur* t dont on étudie le flux à travers la surface a comme composantes, dans les deux systèmes, t^i et $\bar{t}^\alpha$. On sait qu'un élément de surface bi-dimensionnel est représenté par un tenseur ds^{ij} antisymétrique; défini par :

(1) $$ds^{ij}=(dx^i\,\delta x^j-dx^j\delta x^i)=\varepsilon^{ijk}\,d\sigma_k$$

où dx et δx sont deux incréments vectoriels tangents à la surface, et $d\sigma_k$ la capacité tensorielle duale de ds^{ij}.

On peut représenter t par le *bivecteur* (tenseur antisymétrique) :

(2) $$\phi_{ij}=\varepsilon_{ijk}\,t^k$$

ce qui est logique puisque le flux est un scalaire (notons que t^k est donc une densité tensorielle duale de ϕ_{ij}).

(ε^{ijk} et ε_{ijk} sont des pseudotenseurs, respectivement densité et capacité tensorielles, notions pour lesquelles nous ne pouvons que renvoyer le lecteur aux ouvrages d'enseignement.)

Le flux est alors défini par :

(3) $$\text{flux}=\tfrac{1}{2}\,\phi_{ij}\,ds^{ij}=\tfrac{1}{2}\,\phi_{ij}\,(dx^i\,\delta x^j-dx^j\,\delta x^i)=t^k\,d\sigma_k$$

Dans le nouveau système de coordonnées, où $\mathrm{d}u^1$, δu^2 sont par hypothèse les seules composantes non nulles de dx, δx, on obtient donc :

(4) $$\text{flux}=\tfrac{1}{2}\,\phi_{ij}\,(\tfrac{\partial x^i}{\partial u^1}\,\tfrac{\partial x^j}{\partial u^2}-\tfrac{\partial x^j}{\partial u^1}\,\tfrac{\partial x^i}{\partial u^2})du^1\delta u^2=\phi_{ij}\,\tfrac{\partial x^i}{\partial u^1}\,\tfrac{\partial x^j}{\partial u^2}\,du^1\delta u^2$$
$$=\bar{\phi}_{12}\,du^1\delta u^2=(\bar{t}^3/\sqrt{G})\,\sqrt{G}\,d\bar{\sigma}_3=t.n\,dS$$

On appelle $n(x)$ la normale unité à la surface en chaque point. Seul le produit $\bar{t}^3\,d\bar{\sigma}_3$ intervient puisque $d\bar{\sigma}_1$ et $d\bar{\sigma}_2$ sont nuls. $G(x)$ est, dans le nouveau système, le déterminant du *tenseur métrique intrinsèque de la surface étudiée.*

Revenons en effet à l'expression (3) :

(5) $$\text{flux}\;=\;\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,t^k(dx^i\,\delta x^j-dx^j\delta x^i)=t^k\,(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\tfrac{(dx^i\,\delta x^j\,-\,dx^j\,\delta x^i)}{|dx\,\times\,\delta x|})\,|dx\times\delta x|=t^k n_k\,dS$$

qui résulte du fait que les expressions $(dx^i\,\delta x^j-dx^j\,\delta x^i)$ sont évidemment les composantes du produit vectoriel $dx\times\delta x$. Donc en passant dans le nouveau système de coordonnées on obtient l'expression (4). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le cas échéant par un calcul détaillé que $\sqrt{G}\;=\;|dx\;\times\;\delta x|/du^1\delta u^2$ est effectivement la racine carrée du déterminant du tenseur métrique considéré (nous en reparlerons plus simplement dans la rubrique GA). On sent bien que ces analyses sont compliquées et impliquent un vaste apprentissage préalable.

Appliquons tout cela au calcul du flux d'un vecteur $t = n$ à travers un quartier de sphère de rayon R , compris entre :

(6) $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$

L'intérêt de ce calcul trivial est de montrer que les éléments théoriques apparaissent tout seuls, sans effort de mémorisation. On peut écrire les relations suivantes :

(7) $\quad x = R\sin\theta\cos\varphi \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi \qquad z = R\cos\theta$

(8)
$$\begin{aligned} dx &= R\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - R\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi + \sin\theta\cos\varphi\, dR \\ dy &= R\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + R\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi + \sin\theta\sin\varphi\, dR \\ dz &= -R\sin\theta d\theta + \cos\theta dR \end{aligned}$$

On a donc sur la surface de la sphère un $(dl)^2$ égal à :

(9) $\quad (dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2$

On en déduit :

(10) $\quad G = R^4\sin^2\theta \qquad \sqrt{G} = R^2\sin\theta$

Le flux élémentaire est donc égal à $R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, soit en intégrant :

(11) $\quad \text{flux} = \int_0^{\pi/2} R^2\sin\theta d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi = R^2\pi/2$

ce qui correspond bien à la surface du secteur sphérique considéré.

2/ Les formes différentielles extérieures.

L'usage de cet outil en physique se développe. Il présente d'indéniables qualités de souplesse et de puissance, mais aussi de grands risques de confusion.

Le fait de pouvoir opérer sur des variétés éventuellement sans métrique, et sans hypothèse de plongement dans une variété de dimension supérieure, a comme contrepartie l'abstraction des raisonnements sur les espaces tangents et cotangents. A un niveau plus modeste le fait d'appeler dx^i une *forme différentielle* – c'est à dire un *vecteur de base* de l'espace cotangent – , alors que la plupart des étudiants, voire des professeurs, ont l'habitude de désigner ainsi l'incrément scalaire de la ième composante d'un vecteur de l'espace tangent, constitue un piège dangereux. Pour éviter au moins ces confusions élémentaires nous réserverons dans la suite la lettre d aux formes différentielles, et la lettre δ aux incréments scalaires ou vectoriels.

Soyons concrets et raisonnons directement sur l'exemple du flux à travers une surface sphérique. Nous avons deux systèmes de coordonnées reliés par (7) et (8), où toutes les variables représentent des formes différentielles.

Dans la littérature on désigne par $\partial/\partial x$, $\partial/\partial\theta$, etc... , les vecteurs de base de l'espace tangent, ce qui dans le cas le plus général est une redoutable abstraction (en clair cela veut dire que l'espace vectoriel dit tangent est en toute rigueur un *espace linéaire d'opérateurs différentiels*). Nous pouvons cependant nous simplifier la vie en parlant de vecteurs $\partial M/\partial\theta$, $\partial M/\partial\varphi$, etc... , en profitant du fait que notre sphère est immergée dans un espace euclidien, ce qui donne une véritable signification géométrique aux vecteurs tangents. Plus précisément nous pouvons écrire les accroissements suivants dans l'espace tangent :

(12) $\quad \delta M_\theta = \frac{\partial M}{\partial\theta}\delta\theta \qquad \delta M_\varphi = \frac{\partial M}{\partial\varphi}\delta\varphi \qquad \delta M_R = \frac{\partial M}{\partial R}\delta R = 0$

où $\delta\theta$, $\delta\varphi$, sont des scalaires, δM_θ , δM_φ , des vecteurs.

Par dualité (définition de l'espace cotangent) nous avons :

(13) $\quad d\theta(\frac{\partial M}{\partial\theta}) = d\varphi(\frac{\partial M}{\partial\varphi}) = 1 \qquad d\theta(\frac{\partial M}{\partial\varphi}) = d\varphi(\frac{\partial M}{\partial\theta}) = 0$

plus généralement $dx^i(\partial/\partial x_j) = \delta^i_j$.

Nous partons de l'expression :

(14) $\omega = t_x\, dy \wedge dz + t_y\, dz \wedge dx + t_z\, dx \wedge dy$

que nous transformons – relations (8) – en $d\theta \wedge d\varphi$ par l'opération $f^*\omega$ dite "pull back" dans la littérature (f est la fonction faisant passer de θ, ω, à x, y, z). Tous calculs faits on obtient :

(15) $f^*\omega = (t_x \sin\theta \cos\varphi + t_y \sin\theta \sin\varphi + t_z \cos\theta) R^2 \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = t.n \sqrt{G}\, d\theta \wedge d\varphi$

Il ne reste plus qu'à intégrer l'expression :

(16) $\int_S \omega(\delta M_\theta, \delta M_\varphi) = \int_{\mathcal{D}} f^*\omega(\delta M_\theta, \delta M_\varphi) = \int_{\mathcal{D}} t.n R^2 \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi(\frac{\partial M}{\partial \theta}\delta\theta, \frac{\partial M}{\partial \varphi}\delta\varphi)$

$$= \int_{\mathcal{D}} t.n\, R^2 \sin\theta\, \delta\theta\, \delta\varphi$$

On note que la dernière ligne de (16) n'est rien d'autre qu'une intégrale double classique. Notre analyse permet de voir comment elle est générée. Souvent les auteurs passent cette étape sous silence, ce qui nous paraît regrettable car la "définition" de l'intégrale d'un ω^k sur un $\mathbb{R}^k$ peut être *démontrée* à partir des hypothèses de base. On note aussi que nous intégrons $f^*\omega$ non pas sur S mais sur un domaine $\mathcal{D}$ parcouru par θ, φ dans un $\mathbb{E}^2$. Certains auteurs écrivent $\mathbb{R}^2$ laissant ainsi croire que le couple θ, φ décrit une structure euclidienne dans $\mathcal{D}$, ce qui est évidemment absurde puisque aucune métrique (élément de longueur) ne peut y être définie. Le calcul d'une intégrale double est le même que l'espace des variables soit métrique ou affine.

[Remarque : Nous avons utilisé pour calculer (16) des expressions du type
$dx \wedge dy(\delta u, \delta v) = dx(\delta u)\, dy(\delta v) - dx(\delta v)\, dy(\delta u)$].

Nous avons donc retrouvé le résultat tensoriel :

(17) $\int_S t.n \sqrt{G}\, \delta\theta\, \delta\varphi = \int_S t.n\, \delta S \qquad \sqrt{G} = R^2 \sin\theta$

Il est intéressant de compléter cette analyse en retrouvant l'expression δS d'une autre manière. En effet en éliminant $d\theta, d\varphi$, entre les deux premières équations (7), avec $dR = 0$, on trouve :

(18) $d\theta = (R\cos\theta)^{-1}(\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy)$

$d\varphi = (R\sin\theta)^{-1}(-\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy)$

(19) $d\theta \wedge d\varphi = (R^2 \cos\theta \sin\theta)^{-1}\, dx \wedge dy$

(20) $R^2 \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = (\cos\theta)^{-1}\, dx \wedge dy$

En appliquant cette forme différentielle au couple $(\delta M_\theta, \delta M_\varphi)$ on trouve :

(21) $\delta S = (\cos\theta)^{-1}\, \delta\sigma$

où $\delta\sigma$ est la projection de la surface δS sur le plan (x, y).

Comme dans le cas tensoriel on note que les analyses précédentes impliquent une formation théorique préalable non négligeable.

3/ L'algèbre géométrique (GA) et l'algèbre vectorielle de Gibbs (Gbb).

Soit δM un vecteur tangent quelconque à la surface S en M. Nous n'avons cette fois aucun état d'âme pour le définir géométriquement puisqu'en GA il existe quelle que soit la surface étudiée. Si donc θ et φ sont les coordonnées sur la surface nous définissons δM par :

(22) $\delta M = \frac{\partial M}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial M}{\partial \varphi}\delta\varphi = \delta M_\theta + \delta M_\varphi$

Considérons le bivecteur :

(23) $\delta M_\theta \wedge \delta M_\varphi = \frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi}\delta\theta\, \delta\varphi = \frac{\frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi}\right|} \left|\frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi}\right| \delta\theta\, \delta\varphi = B_{\theta\varphi} \sqrt{G}\, \delta\theta\, \delta\varphi$

en désignant, pour simplifier les expressions, par $B_{\theta\varphi}$ le bivecteur unitaire caractérisant le plan tangent en M. Nous avons donc :

(24) $$\delta S = \left|\frac{\partial M}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial M}{\partial\varphi}\right|\delta\theta\,\delta\varphi = = \sqrt{G}\,\delta\theta\,\delta\varphi$$

avec ici :

(25) $$\left|\frac{\partial M}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial M}{\partial\varphi}\right| = \left|\frac{\partial M}{\partial\theta}\right|\left|\frac{\partial M}{\partial\varphi}\right| = R^2\sin\theta = \sqrt{G}$$

Le flux du vecteur t s'exprime donc en GA par :

(26) $$t.(I\delta M_\theta\wedge\delta M_\varphi) = t.(IB_{\theta\varphi})\,\delta S = t.n\,\delta S$$

où I représente le pseudoscalaire de l'espace englobant $\mathbb{R}^3$. Nous avons utilisé la relation évidente en GA :

(27) $$n = IB_{\theta\varphi}$$

qui fixe les orientations relatives de la normale et de la surface.

L'analyse faite ci-dessus est à la portée d'un débutant en GA. Notons en particulier que la double signification de G devient évidente en GA du fait de la relation vectorielle :

(28) $$(a\wedge b)^2 = (a.b)^2 - a^2b^2$$

Compte tenu de l'existence du produit vectoriel en $\mathbb{R}^3$ tout ce travail peut être fait en Gbb. A l'élégance de la méthode près ce n'est, dans ce cas simple, pas fondamentalement différent de la GA. Nous le laissons au lecteur en guise d'exercice.

4/Commentaires et extensions en dimension n .

Il y a évidemment une grande part de subjectivité dans l'appréciation du meilleur outil, et nous ne prétendons pas détenir la vérité. Essayons simplement de dégager quelques idées raisonnables :

– Le *calcul tensoriel* a prouvé son efficacité dans tous les domaines de la physique. Il est cependant par construction lié à l'emploi de systèmes de coordonnées, d'où la débauche d'indices qui le caractérise. Ceci peut rendre les calculs très lourds, et plus difficiles les interprétations. Ses adeptes souffrent en général de ce que David Hestenes appelle "coordinitis virus" .

– Les *formes différentielles* sont de plus en plus utilisées. Sous réserve de ce que nous dirons sur la GA, leur emploi dans des domaines avancés (mécanique hamiltonienne, structures symplectiques, ...) a certainement été à la base de grands progrès théoriques. En revanche leur utilisation systématique dans des situations plus simples, l'électromagnétisme classique par exemple, nous paraît discutable. Le prix à payer est assez lourd : langage mathématique nouveau, s'appuyant sur des notions très abstraites qui accroissent la distance entre la théorie et son application.

– La *GA* représente théoriquement un grand progrès par rapport aux formes différentielles, qu'elle englobe tout en les rendant plus concrètes et plus intuitives. Malheureusement la GA semble dans une impasse, car elle n'est pas du tout enseignée en France, et très marginalement dans le Monde. Il est paradoxal de constater que les hasards de l'évolution historique parallèle des outils mathématiques et de la physique ont conduit les scientifiques à développer une version sophistiquée mais partielle de la GA, à partir de la "Ausdehnungslehre" de Grassmann et des travaux d'Elie Cartan, puis en quelque sorte à se lier une main derrière le dos en s'interdisant d'utiliser la version complète retrouvée et rénovée cent ans plus tard. Comme il est difficile de croire à une sorte de masochisme collectif, il reste l'idée que tout cela illustre la grande viscosité de la transmission de la Science et le caractère irréversible de certaines évolutions. Tout se passe comme si une bonne route manquée à un certain instant ne pouvait plus jamais être réempruntée – sauf par quelques originaux qui se perdront dans le désert !

– Les trois outils susmentionnés comportent d'évidentes parentés. L'une d'entre elles est le fait qu'ils sont immédiatement transposables à des espaces vectoriels de dimension et de signature quelconques. Le cas le plus connu est l'espace de Minkowski de la physique relativiste, dont bien sûr l'électromagnétisme.

– *L'algèbre de Gibbs* a été très utilisée à partir de la fin du 19ème siècle. Efficace dans beaucoup de calculs classiques elle a sans doute été peu à peu supplantée par les méthodes tensorielles ("coordinitis virus"). Elle souffre de handicaps sérieux, le plus évident étant qu'elle ne peut être transposée hors $\mathbb{R}^3$. Même dans ses applications spécifiques elle est beaucoup moins souple que la GA : on n'y dispose pas du produit géométrique, et le produit vectoriel classique n'est pas associatif. Cette faiblesse est particulièrement marquée lorsque l'on aborde le domaine des opérateurs différentiels et du calcul intégral. Une curiosité de la Gbb qui passe en général inaperçue, peut-être parce que les auteurs et professeurs oublient de la souligner, est que l'on appelle *vecteurs* des entités dont la *longueur* se mesure en *unités de surface.* On fixe son attention sur le fait que le produit vectoriel dépend de l'orientation du trièdre de base, mais l'on oublie cette caractéristique encore plus surprenante. Seul le passage au calcul tensoriel permet de rétablir un schéma rationnel,par l'introduction des notions de capacité et de densité.

G.Ringeisen

Juillet 2008