Calcul en GA d'une rotation caractérisée par les angles d'Euler.

Ce calcul fastidieux est rarement exposé en détail, que ce soit dans les exposés classiques ou en algèbre géométrique. Il est de surcroît rendu confus par la multiplicité des conventions (mathématiciens , physiciens , astronomes, etc ...) existantes.[1] J'ai été conduit à rédiger le présent texte à la suite d'une discussion sur un forum, pour une question concernant la programmation de rotations d'objets graphiques.

Il est beaucoup plus simple d'opérer avec l'algèbre géométrique qu'avec des matrices, notamment parce que l'on peut se limiter à calculer les éléments vraiment utiles, et qu'en outre la souplesse de cet outil permet de reconstruire très vite la convention la mieux adaptée au problème étudié.

1/Les données de base.

Nous partons de vecteurs v définis dans un premier repère (e_1, e_2, e_3) . Nous transformons ce repère en (e_1', e_2', e_3') par une première rotation d'angle 2α autour de l'axe e_3 . Nous obtenons donc, pour une transformation active de tous les vecteurs :

(1) $$v = x^k e_k \qquad e_k' = R_\alpha e_k \tilde{R}_\alpha \qquad v' = R_\alpha v \tilde{R}_\alpha$$

$$R_\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha I e_3 \qquad \tilde{R}_\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha I e_3 \qquad R_\alpha \tilde{R}_\alpha = 1$$

Dans ces expressions $I = e_1 e_2 e_3$ représente le pseudoscalaire, qui commute avec tous les éléments, et l'on a les relations :

(2) $$I e_1 = e_2 e_3 \qquad I e_2 = e_3 e_1 \qquad I e_3 = e_1 e_2$$

Puis nous faisons une deuxième rotation d'angle 2β autour de l'axe e_1' pour obtenir :

(3) $$e_k'' = R_\beta e_k' \tilde{R}_\beta \qquad v'' = R_\beta v' \tilde{R}_\beta \qquad R_\beta = \cos\beta - \sin\beta I e_1'$$

Enfin nous appliquons à v'' une troisième rotation d'angle 2γ autour de l'axe e_3'' :

(4) $$v''' = R_\gamma v'' \tilde{R}_\gamma \qquad R_\gamma = \cos\gamma - \sin\gamma I e_3''$$

$$v''' = R v \tilde{R} \qquad R = R_\gamma R_\beta R_\alpha$$

et nous obtenons les coordonnées de v dans le repère initial par :

(5) $$v''' = y^k e_k = e^k . v''' e_k \qquad y^k = e^k . (R v \tilde{R}) = x^i e^k . (R e_i \tilde{R}) \qquad (e^k = e_k)$$

De plus en explicitant R nous obtenons les éléments, axe et angle, de la rotation composée.

2/Un calcul détaillé.

Revenons d'abord sur les rotors successifs que nous pouvons écrire de la manière suivante :

(6) $$R_\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha I e_3 = F_1(\alpha, e_3)$$

$$R_\beta = \cos\beta - \sin\beta I e_1' = \cos\beta - \sin\beta I R_\alpha e_1 \tilde{R}_\alpha = F_2(\alpha, \beta, e_1, e_3)$$

$$R_\gamma = \cos\gamma - \sin\gamma I e_3'' = \cos\gamma - \sin\gamma I R_\beta R_\alpha e_3 \tilde{R}\alpha \tilde{R}_\beta = F_3(\alpha, \beta, \gamma, e_1, e_2, e_3)$$

$$R = R_\gamma R_\beta R_\alpha = F(\alpha, \beta, \gamma, e_1, e_2, e_3)$$

Ces expressions peuvent donc être obtenues de manière enchaînée à partir de la donnée du repère de base, et des angles α, β, γ .

1. On peut en écrire douze différentes.

Calculons donc le rotor final, avec le minimum d'efforts. Nous obtenons successivement en utilisant les relations des types (6) et (1) :

$$(7) \qquad R_\beta\, R_\alpha = \cos\beta\, R_\alpha - \sin\beta\, I\, R_\alpha\, e_1$$

$$(8) \qquad R = R_{\,\gamma} R_\beta\, R_\alpha = \cos\gamma\, R_\beta\, R_\alpha - \sin\gamma\, I\, R_\beta\, R_\alpha\, e_3$$

$$= \cos\gamma\,(\cos\beta R_\alpha - \sin\beta\, I\, R_\alpha\, e_1) - \sin\gamma\, I\,(\cos\beta R_\alpha - \sin\beta\, I\, R_\alpha\, e_1)\, e_3$$

$$= \cos\gamma\cos\beta R_\alpha - \sin\beta\cos\gamma\;\; I R_\alpha\, e_1 - \sin\gamma\;\; \cos\beta\, I R_\alpha e_3 + \sin\beta\sin\gamma\, I R_\alpha\, e_2$$

$$I R_\alpha = I\cos\alpha + \sin\alpha\; e_3$$

$$I\, R_\alpha\, e_1 = \cos\alpha\, I e_1 + \sin\alpha\, I\, e_2$$

$$I\, R_\alpha\, e_2 = \cos\alpha\, I e_2 - \sin\alpha\, I\, e_1$$

$$I\, R_\alpha\, e_3 = \cos\alpha\, I e_3 + \sin\alpha$$

On obtient donc, tous calculs faits :

$$(9) \qquad R = R_{\,\gamma} R_\beta\, R_\alpha = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

$$- I e_1\,(\cos\alpha\, \sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\, \sin\beta\, \sin\gamma)$$

$$- I e_2\,(\sin\alpha\, \sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\, \sin\beta\, \sin\gamma)$$

$$- I e_3\,(\cos\alpha\, \cos\beta\, \sin\gamma + \sin\alpha\, \cos\beta\, \cos\gamma)$$

$$(9\text{ bis}) \quad R = \cos\beta\cos(\alpha+\gamma) - I e_1 \sin\beta\cos(\alpha-\gamma) - I e_2 \sin\beta\sin(\alpha-\gamma) - I e_3 \cos\beta\, \sin(\alpha+\gamma)$$

Si maintenant nous désignons par u et 2θ respectivement le vecteur unitaire de l'axe et l'angle de rotation nous pouvons immédiatement calculer :

$$(10) \qquad R = \cos\theta - \sin\theta\, I\, u$$

$$(11) \qquad \cos\theta = \cos\beta\cos(\alpha+\gamma)$$

$$(12) \qquad u = (\sin\theta)^{-1}\,\{e_1 \sin\beta\cos(\alpha-\gamma) + e_2 \sin\beta\sin(\alpha-\gamma) + e_3 \cos\beta\, \sin(\alpha+\gamma)\}$$

De telles informations ne sont évidemment pas immédiatement disponibles dans une méthode matricielle. Il en va de même pour les données détaillées concernant le vecteur v''' , qui sont aisément calculées par les formules (5).

On obtient :

$$(13) \qquad R e_i\, \tilde{R} = (\cos\theta - \sin\theta I u)\, e_i\, ((\cos\theta + \sin\theta I u)$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) e_i + \cos\theta\, \sin\theta\, I\, (e_i\, u - u\, e_i)$$

$$= \cos 2\theta e_i + \sin 2\theta I e_i \wedge u$$

$$(14) \qquad e^k.(R e_i\, \tilde{R}) = \cos 2\theta\; \delta_i^k + \sin 2\theta\, e^k.(I e_i \wedge u) = \cos 2\theta\; \delta_i^k + \sin 2\theta\, I\,(e^k \wedge e_i \wedge u)$$

$$(15) \qquad y^k = x^i\,[\cos 2\theta\; \delta_i^k + \sin 2\theta\, I\,(e^k \wedge e_i \wedge u)] = \cos 2\theta\, x^k + \sin 2\theta\, I\,(e^k \wedge v \wedge u)$$

On trouve en définitive la formule générale :

$$(16) \qquad y^k = \cos 2\theta\, x^k - \sin 2\theta\; \det(e^k, e_i\,, u)\, x^i$$

En détaillant (16) on obtient :

$$(17) \qquad y^1 = \cos 2\theta\, x^1 - \sin 2\theta\,(x^2 u^3 - x^3 u^2)$$

$$y^2 = \cos 2\theta\, x^2 - \sin 2\theta\,(x^3 u^1 - x^1 u^3)$$

$$y^3 = \cos 2\theta\, x^3 - \sin 2\theta\,(x^1 u^2 - x^2 u^1)$$

3/Une deuxième interprétation de cette composition de rotations.

N'ayant pas eu l'occasion depuis fort longtemps de me pencher sur les angles d'Euler j'ai découvert en lisant Hestenes et Doran -Lasenby que je n'avais jamais pris conscience d'une intéressante interprétation alternative de cette combinaison de rotations. Elle s'impose naturellement en GA, alors que dans les méthodes matricielles traditionnelles elle reste en quelque sorte dissimulée derrière le calcul brut de produits de matrices.

Revenons aux formules (6), (7) et (8). Appelons $B_\alpha, B_\beta, B\gamma$, les rotors suivants :

(18) $\quad B_\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha I e_3 \qquad B_\beta = \cos\beta - \sin\beta I e_1 \qquad B_\alpha = \cos\gamma - \sin\gamma I e_3$

Ce sont donc des rotors caractérisant les rotations d'angle 2α, 2β, 2γ, autour de deux axes fixes initiaux et non plus autour des axes variables chers aux astronomes. Pouvons nous réécrire la rotation globale R en fonction de ces éléments ? On a :

(19) $\quad R_\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha I e_3 = B_\alpha$

(20) $\quad R_\beta = \cos\beta - \sin\beta I e_1' = \cos\beta - \sin\beta I R_\alpha e_1 \tilde{R}_\alpha = R_\alpha(\cos\beta - \sin\beta I e_1)\tilde{R}_\alpha = R_\alpha B_\beta \tilde{R}_\alpha$

(21) $\quad R_\gamma = \cos\gamma - \sin\gamma I e_3'' = R_\beta R_\alpha(\cos\gamma - \sin\gamma I e_3)\tilde{R}\alpha \tilde{R}_\beta = R_\beta R_\alpha B_\gamma \tilde{R}\alpha \tilde{R}_\beta$

Donc :

(22) $\quad R = R_\gamma R_\beta R_\alpha = R_\beta R_\alpha B_\gamma = R_\alpha B_\beta B_\gamma = B_\alpha B_\beta B_\gamma$

Ceci veut dire que nous pouvons remplacer la succession de rotations autour des axes variables par la même succession, et avec les mêmes angles, autour des axes fixes initiaux, mais en inversant l'ordre – et non pas le sens – dans lequel sont pratiquées ces rotations (rappelons qu'il s'agit toujours de rotations actives et non d'un simple changement de coordonnées). Nous prouvons donc en passant un résultat géométrique sur les rotations qui est loin d'être intuitif, surtout si l'on observe que les trois axes variables[2] de rotation ne sont pas orthonormaux. Notons aussi que ce résultat est vrai quelle que soit l'une des douze conventions adoptées.

J'en ai profité bien entendu pour refaire le calcul détaillé de R et rassurer le lecteur sur sa véracité.

(23) $\quad R = (\cos\alpha - \sin\alpha I e_3)(\cos\beta - \sin\beta I e_1)(\cos\gamma - \sin\gamma I e_3) \quad \Longrightarrow \quad (9)$

Il reste une question : pourquoi n'en parle-t-on pas dans les exposés matriciels ? C'est probablement – simple hypothèse de ma part – parce que les matrices de rotation simples utilisées ne mettent en évidence que le n° d'ordre de l'axe de rotation sans préciser la position de cet axe dans le repère initial fixe du problème étudié. En effet les matrices agissent directement sur les coordonnées des vecteurs transportés, en laissant dans l'ombre la notion vectorielle géométrique intrinsèque. Les rotors en revanche sont construits sur des éléments complètement définis dans l'espace.

Comparaison avec la méthode matricielle.

4/Les angles d'Euler en notation matricielle.

Pour exposer cette question en notation matricielle il est raisonnable, pour minimiser les riques d'erreur, de passer par l'intermédiaire du calcul tensoriel. Nous appellerons donc :

2. A vrai dire un fixe et deux variables. Il n'est pas surprenant que l'on puisse atteindre un même point de l'espace avec différentes combinaisons de rotations. Ce qui est moins évident c'est que l'on puisse trouver deux combinaisons d'axes avec les mêmes valeurs angulaires.

$|x|_e = x^i\, e_i$ un vecteur exprimé en coordonnées contravariantes dans le repère des e_i orthonormé;

$A_{e,\alpha} = |\alpha^i_j|$ une matrice exprimant dans le repère des (e_i) une rotation d'angle α autour d'un axe orienté, dont nous préciserons le cas échéant le numéro ; les seules matrices de ce type simples à caractériser et à construire étant celles réalisant des rotations autour de l'un des axes de coordonnées, nous nous ramènerons toujours à ce cas.

La rotation transformant un repère (e) en un repère (f) et un vecteur x repéré dans (e) en un vecteur ξ , repéré dans (f) et dans (e) , s'écrira :

(24) $\quad f_j = \alpha^i_j\, e_i \qquad \xi = x^j\, f_j = x^j\, \alpha^i_j\, e_i = \xi^i\, e_i \qquad \xi^i = \alpha^i_j\, x^j$

Ceci exprimé en langage matriciel donnera [3]:

(25) $\quad |\xi|_e = A\,|x|_e$ conformément à la règle *licol* !

Si, comme dans l'exemple de référence, la rotation se fait autour de e_3 avec un angle α on obtient donc :

(26)
$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notons que cette matrice de rotation est écrite en principe dans le système (e), mais ne s'y réfère pas explicitement. Nous trouverons donc la même matrice numérique en faisant la rotation d'angle α autour de (f_3), par exemple, dans le système (f) .

Nous allons maintenant transformer le vecteur ξ en un vecteur η , repéré dans les systèmes (g), (f) et (e) , par une rotation d'angle β autour de (f_1) . Celle-ci transforme les vecteurs (f_j) en vecteurs (g_k) et l'on a :

(27) $\quad g_k = \beta^j_k\, f_j \qquad \eta = x^k\, g_k = x^k\, \beta^j_k\, f_j = x^k\, \beta^j_k\, \alpha^i_j\, e_i = \eta^i\, e_i \qquad \eta^i = x^k\, \beta^j_k\, \alpha^i_j$

Mais attention, pour passer en calcul matriciel il faut écrire *(licol ...)* :

(28) $\quad \eta^i = \alpha^i_j\, \beta^j_k\, x^k \qquad |\eta|_e = AB\,|x|_e$

Dans l'exemple étudié la matrice B s'écrit :

(29)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = B$$

Enfin la dernière rotation d'un angle γ autour de g_3 va donner :

(30) $\quad h_m = \gamma^k_m\, g_k \qquad \zeta = x^m h_m = x^m\, \gamma^k_m\, g_k = x^m \gamma^k_m \beta^j_k\, \alpha^i_j\, e_i = \zeta^i\, e_i \qquad \zeta^i = x^m \gamma^k_m \beta^j_k\, \alpha^i_j$

(31) $\quad \zeta^i = \alpha^i_j\, \beta^j_k\, \gamma^k_m\, x^m \qquad |\zeta|_e = ABC\,|x|_e$

avec :

(32)
$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Il est donc clair que le vecteur ζ se déduit du vecteur x par les trois rotations successives d'Euler autour de e_3 (A) puis f_1 (B) , puis pour finir g_3 (C) . Notons que ces trois vecteurs ne forment pas un système orthonormé.

3. Attention ! Il n'est peut-être pas inutile d'observer, et de s'en convaincre par un exercice pratique, que dans cette transformation "active" les coefficients assurant le passage des x^i aux ξ^j sont en notation matricielle les transposés de la matrice que l'on est tenté d'écrire pour le passage des e_i aux f_j . La première équation (24) ne peut s'écrire en matriciel ; les vecteurs f_j sont les vecteurs colonnes de la matrice A dans (25) et(26).

Disposons-nous maintenant des éléments nécessaires pour démontrer la propriété alternative redécouverte et démontrée en GA ? La réponse est étonnamment simple ; en effet il suffit de tirer parti du fait que les matrices de rotation A, B, C ne sont affectées à un certain axe de rotation que par la position du nombre 1 dans la matrice. Ceci veut dire que l'on peut oublier les axes d'Euler[4] et choisir l'interprétation la plus élémentaire de la formule (31), qui est l'application au vecteur x de trois rotations consécutives (e_3, γ), puis (e_1, β), enfin (e_3, α), dans l'ordre inverse donc des angles d'Euler.

Les textes que j'ai pu consulter jusqu'à présent donnent évidemment la formule (31) comme conséquence des angles d'Euler[5], mais sans cette explication interprétative finale[6]

5/Approche matricielle directe.

Dans une telle approche, qui cependant nécessite une bonne expérience du calcul matriciel, on pourrait partir, *sans les calculer*, de trois matrices de rotation $A_e(\alpha)$, $B_e(\beta)$, $C_e(\gamma)$ définies dans le repère (e) et écrire directement :

(33) $$|\zeta|_e = C_e\, B_e\, A_e\, |x|_e$$

(34) $$|\zeta|_e = (A_e\, B_f\, C_g\, B_f^{-1} A_e^{-1})(A_e\, B_f\, A_e^{-1})\, A_e\, |x|_e = A_e\, B_f\, C_g\, |x|_e = A B C\, |x|_e$$

Cqfd ! C'est une nouvelle justification de la formule (31).

Le calcul tensoriel est plus sûr, car il évite notamment d'avoir à mémoriser les lois de transformation des matrices.

6/Quelques réflexions en guise de conclusion.

Si je devais conseiller un étudiant je lui dirais d'apprendre à reconstruire rapidement avec les méthodes du calcul tensoriel les formules matricielles et la formulation détaillée des matrices. A condition de savoir manier correctement les indices contravariants et covariants – et de connaître la règle licol ... – c'est un jeu d'enfants qui élimine tout risque d'erreur et des mémorisations inutiles. Il faut cependant faire très attention au placement de l'unique signe moins apparaissant dans chaque matrice de rotation.

Dans ces conditions l'évaluation faite en GA ne présente pas d'avantage significatif en complexité et temps de calcul. En revanche il reste le fait, qui peut être essentiel pour certains problèmes, que la GA fournit directement l'axe final et la rotation globale. Cette méthode qui reste très proche de la réalité géométrique peut aussi fournir aisément tous les éléments intermédiaires qui pourraient être utiles. Sa souplesse et son caractère coordinate free permettent de se mettre à l'abri des nombreux pièges du calcul matriciel. Un avantage moins connu de la GA – et des quaternions standard – est aussi (gimbal lock) d'éviter les situations de blocage des programmes qui peuvent survenir dans des configurations particulières des variables.

G.Ringeisen

avril 2010

4. On oublie aussi qu'elles sont en principe définies dans trois systèmes de référence différents !

5. Souvent simplement sous forme déjà développée.

6. La page ″ Euler angles ″ de Wikipedia donne les deux interprétations au prix d'une démonstration inutilement compliquée. Malheureusement cette page comporte des erreurs, notamment sur l'ordre des matrices, signalées dans la page ″discussion″ mais non transcrites dans le texte principal ! La discussion, très confuse, est un excellent exemple des nombreuses sources d'erreur possibles dans une approche matricielle pure.