Les formules intégrales en GA.

En révisant le théorème fondamental du calcul intégral en algèbre géométrique et son application à diverses formules classiques je me suis rendu compte de divers pièges d'interprétation qui pourraient dérouter le débutant en la matière. D'où le présent texte rédigé d'abord à mon intention ...

Avec diverses variantes évidentes j'utiliserai la formulation suivante, qui est celle de l'ouvrage de Doran et Lasenby [1] :

(1) $\int_M \acute{G}\, \acute{\nabla}\, dV\, \acute{F} = \oint_{\partial M} G\, dA\, F$

(2) $dV = \left| dV \right| V \qquad dA = \left| dA \right| A \qquad \tilde{V}V = \tilde{A}A = 1$

$V\,, A(x)$ pseudoscalaires en x à M et ∂M $\qquad G, F$ multivecteurs

On est naturellement amené à définir une normale n dite extérieure, par une formule du type $A(x)n(x) = V$. Mais l'appellation, qui n'est pas dépourvue d'ambiguïté, importe peu ; seule la formule de définition compte.

A ce stade considérons que la formule (1) est valable pour un domaine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ délimité par une *surface* de dimensions $(n-1)$.

Cette présentation, construite à partir de l'intégration sur une *n-variété* par sommation de *n-simplexes* me paraît meilleure que celle de Hestenes, car elle met clairement en évidence la façon dont l'orientation sur ∂M découle de celle de M *(... the boundary inherits its orientation from the directed volume measure ...).* [1]

Les choses se compliquent un peu lorsque l'on veut établir un théorème analogue sur une *k-variété* non-euclidienne plongée dans un $\mathbb{R}^n$. Il faut alors remplacer la formule (1) par :

(3) $\int_M \acute{G}\, \acute{\nabla}_U\, dU\, \acute{F} = \oint_{\partial M} G\, dA\, F \qquad dU = U\left| dU \right| \qquad \tilde{U}U = 1$

où $dU(x)$ est en x la mesure orientée, de dimension k, sur la variété M.

En notant que :

(4) $\nabla = U^{-1}U\,\nabla = U^{-1}U.\nabla + U^{-1}U \wedge \nabla$

on rappelle donc que $\nabla_U = U^{-1}U.\nabla$ est la projection de ∇ sur l'espace tangent $U(x)$.

Intégrale de chemin d'un gradient.

Formulation classique $\int_\Gamma\, (\nabla\varphi).dl = \varphi(2) - \varphi(1)$, soit en GA :

(5) $\int_\Gamma\, dl.\nabla\varphi = \int_\Gamma\, d\varphi = \varphi(2) - \varphi(1)$

C'est la même chose, mais avec une signification géométrique clarifiée (dérivée directionnelle).

1. La normale n ne joue aucun rôle dans l'orientation relative des deux variétés.

Théorème de Stokes.

Considérons en $\mathbb{R}^3$ la partie supérieure d'une sorte de ballon de rugby coupé en deux le long d'un circuit Γ sur lequel nous adoptons un sens de circulation cohérent avec l'orientation du bivecteur A sur la surface S , délimitée par Γ. Ainsi, sur un ballon aplati, la combinaison d'un sens de circulation positif usuel, *counterclockwise* sur Γ, avec un vecteur normal m orienté *vers le haut* est cohérente avec un pseudoscalaire V *righthanded*. On peut donc écrire successivement, pour l'intégration d'un vecteur f :

$$(6) \qquad \oint_\Gamma dl\, f = \int_S \acute{\nabla}_A \, dA \, \acute{f} \qquad\qquad A(x)\, m(x) = V \qquad\qquad Vm(x) = A(x)$$

$$= - \int_S dA\, \nabla_A f = - \int_S \left|dA\right| A A^{-1} A.\nabla\, f = - \int_S \left|dA\right| A.\nabla\, f$$ [2]

$$(7) \qquad \oint_\Gamma dl.f = - \int_S \left|dA\right| < A.\nabla\, f > = - \int_S \left|dA\right| (A.\nabla).f = - \int_S \left|dA\right| A.(\nabla \wedge f)$$

$$= - \int_S \left|dA\right| (Vm).(\nabla \wedge f) = - \int_S \left|dA\right| V(m \wedge \nabla \wedge f)$$

$$= - \int_S \left|dA\right| Vm \wedge (V\nabla \times f) = - \int_S \left|dA\right| VVm.(\nabla \times f)$$

$$(8) \qquad \oint_\Gamma f.dl = \int_S m.(\nabla \times f)\left|dA\right|$$

Le lecteur attentif ne manquera pas de remarquer que si l'on utilise effectivement la formule de base (3), on choisit en revanche, pour développer les calculs, une normale $m(x)$ perpendiculaire à S et non seulement à Γ . Cela n'a rien d'étonnant car m, simple outil de calcul et d'analyse, n'intervient pas dans (3).

Cette formule, improprement dite de Stokes – dixit Hestenes, est établie par Feynman dans son cours de physique (électromagnétisme 1) de manière très instructive, comme d'habitude avec des moyens très simples.

L'avantage spécifique de la GA est d'en permettre une immédiate généralisation, et ce sans entrer dans les abstractions des formes différentielles.

Théorème de Green classique.

En appliquant le résultat (8) dans un plan on obtient le résultat connu :

$$(9) \qquad \oint_\Gamma dl.f = \oint_\Gamma Pdx + Q\,dy = \int_S \Big|dA\Big|\, m.(\nabla \times f) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

2. Il est intéressant de noter que les relations :

$$\oint_\Gamma dl\, f = - \int_S dA\; \nabla_A f = - \int_S dA.\nabla_A f = - \int_S dA.\nabla\, f$$

sont un cas particulier de relations plus générales :

$$\oint_{\partial M} d\sigma\, F = \pm \int_M dA\; \nabla_A F = \pm \int_M dA.\nabla_A F = \pm \int_M dA.\nabla\, F$$

dont les deuxièmes membres ont une expression intuitive évidente ; ce sont des sortes de dérivées directionnelles selon A du multivecteur F . Les signes dépendent des propriétés de commutativité de A et ∇_A .

Divergence en $\mathbb{R}^3$, théorème de Gauss.

Considérons un volume simple dans $\mathbb{R}^3$ délimité par une surface fermée, orientée de manière telle que le vecteur normal extérieur, défini ici sans ambiguïté, satisfasse aux relations (2). Calculons le flux d'un vecteur g à travers la surface S. Nous écrivons :

(10) $\int_V \acute{\nabla}\, dV\, \acute{g} = \oint_S dA\, g$

(11) $\int_V |dV|\, V\nabla\, g = \oint_S |dA|\, A\, g = \oint_S |dA|\, Vn\, g$

(12) $\int_V |dV| \nabla . g = \oint_S |dA| n . g$

Nous avons donc retrouvé en trois lignes de calcul le théorème classique de Gauss. Contrairement aux divers théorèmes de Stokes le problème d'orientation est ici très simple. La normale n est effectivement perpendiculaire à ∂M et non, comme il est dit curieusement dans certains textes, à M. Elle mérite ici, mais ici seulement, l'appellation de *normale extérieure*.

Autres théorèmes de type divergence en $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

Le plus connu est le théorème de Gauss dans le plan, soit avec les mêmes principes d'orientation que pour Stokes (6) :

(13) $\oint_\Gamma dl \wedge f = -\int_S dA\, (\nabla . f) \qquad A = nt = n \wedge t \qquad$ (n normale extérieure)

(14) $\oint_\Gamma |dl| t \wedge f = \oint_\Gamma |dl| (nA) \wedge f = -\oint_\Gamma |dl| A\, n . f = -\int_S |dA|\, A\, (\nabla . f)$

(15) $\oint_\Gamma |dl|\, n . f = \int_S |dA|\, (\nabla . f)$

On a également :

(16) $\int_S \varphi\, dA = \int_S \varphi\, A\, |dA| = \int_S \varphi\, Vn\, |dA| = \int_V dV\, \nabla\varphi = \int_V V\, |dV|\, \nabla\varphi$

(17) $\int_S n\, \varphi\, |dA| = \int_V \nabla\varphi\, |dV|$

et :

(18) $\int_S dA\, f = \int_V dV\, \nabla f = \int_S |dA| Vn\, f = \int_V |dV| V\, \nabla f$

(19) $\int_S |dA| n\, f = \int_V |dV|\, \nabla f$

(20) $\int_S |dA| n \wedge f = \int_V |dV|\, \nabla \wedge f$

(21) $\int_S |dA| n \times f = \int_V |dV|\, \nabla \times f$

Enfin, pour un bivecteur F :

(22) $\int_S dA\, F = \int_V \acute{\nabla}\, dV \acute{F} = \int_V dV\, \nabla F$

(23) $\int_S dA . F = \int_V dV . (\nabla \wedge F)$

Géneralisation en dimension n .

Considérons une *k-variéte* $\mathcal{M}$ plongée dans un espace euclidien minimal de dimension n , délimitée par une *(k-1)-variété* $\partial\mathcal{M}$.

(24) $k \leqslant n \qquad dU = U\,|U|$ pour $\mathcal{M} \qquad dA = A|\,A|$ pour $\partial\mathcal{M}$

F multivecteur de grade au plus égal à n

(25) $Am = A.m + A \wedge m = U \implies A.m = 0$

La relation (1) devient :

(26) $\int_{\mathcal{M}} \acute{\nabla}_U dU \acute{F} = \int_{\partial\mathcal{M}} dA\,F$

que nous pouvons modifier ainsi :

(27) $(-1)^{k-1} \int_{\mathcal{M}} dU\,\nabla_U F = \int_{\partial\mathcal{M}} dAF$

(28) $(-1)^{k-1} \int_{\mathcal{M}} |dU| UU^{-1} U.\nabla F = \int_{\partial\mathcal{M}} dAF$

(29) $(-1)^{k-1} \int_{\mathcal{M}} |dU|\,U.\nabla F = \int_{\partial\mathcal{M}} |dA| A\,F$

C'est à partir de cette dernière relation très générale que nous pouvons développer toute une suite d'applications particulières. Je me limiterai aux suivantes obtenues en choisissant pour $\mathcal{M}$ un *domaine* de l'espace $\mathbb{R}^n$ délimité par une *surface* $\partial\mathcal{M}$ orientable et différentiable :

(30) $k = n \qquad U = V \qquad Am = V$

(31) $Am = A.m + A \wedge m = V \implies A.m = 0$

On note que la méthode Doran/Lasenby de *k-angulation* de $\mathcal{M}$ définit clairement la relation entre les orientations respectives de $\mathcal{M}$ et de $\partial\mathcal{M}$, même si la visualisation n'est possible qu'en dimensions 2 et 3. L'orientation de m en découle par $Am = V$. Il s'agit là bien de la normale à ∂M et non à $\mathcal{M}$, bien que comme on l'a vu ci-dessus il puisse être utile de recourir à une normale à $\mathcal{M}$ (dans les cas où comme dans le théorème de Stokes il y a *embedding*).

En repartant de la relation (27) on obtient aisément:

(32) $(-1)^{n-1} \int_{\mathcal{M}} |dV| V\,\nabla F = \int_{\partial\mathcal{M}} |dA| A\,F$

(33) $(-1)^{n-1} \int_{\mathcal{M}} |dV|\,\nabla F = \int_{\partial\mathcal{M}} |dA| m\,F$

(34) $(-1)^{n-1} \int_{\mathcal{M}} |dV|\,\nabla . F = \int_{\partial\mathcal{M}} |dA| m.F$

(35) $(-1)^{n-1} \int_{\mathcal{M}} |dV|\,\nabla \wedge F = \int_{\partial\mathcal{M}} |dA| m \wedge F$

On trouve ainsi une généralisation des relations (12) et (20).

Une question de signes.

Parmi les exemples donnés ci-dessus les seuls présentant quelques difficultés sont évidemment le théorème de Stokes et la rubrique généralisation à $\mathbb{R}^n$. Il est instructif de revenir sur le formalisme de type Hestenes. En prenant le cas le plus simple, le théorème de Green dans le plan, on écrit alors, avec les mêmes orientations que précédemment :

(36) $\oint_\Gamma dl.f = \int_S < dA \nabla_S f >$

(37) $\oint_\Gamma dl.f = \int_S \left| dA \right| A.(\nabla_S \wedge f) = -\int_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx\,dy$

Le signe est donc faux. En revanche avec Doran/Lasenby on écrit :

(24) $\oint_\Gamma dl.f = \int_S < \nabla_S\, dA\, f > = -\int_S < dA \nabla_S f >$

ce qui permet de retrouver le résultat correct.

La même difficulté ne se présente pas pour les intégrales de volume en $\mathbb{R}^3$ car $\nabla_V dV = dV \nabla_V$. Mais peut-être ai-je mal interprété Hestenes [2], qui rétablit me semble-t'il le signe correct des relations (36) et (37) en inversant lorsque c'est nécessaire la relation entre le sens de circulation sur Γ et l'orientation de dA , mais sans l'expliquer clairement (à suivre ...).

(Suite ...) En effet une lecture plus attentive du document [2] apporte la réponse à la question posée ci-dessus. La formule (4.1) donne une définition de la dérivée par rapport à un certain r-vecteur, construite précisément de manière telle que le théorème intégral de base (5.1) soit exact[3]. L'inconvénient cependant est que la relation entre l'orientation de la variété $\mathcal{M}$ et la variété $\partial\mathcal{M}$ est définie par une relation $Vn = A$ où n représente une *normale extérieure* , évidente en dimensions 1, 2, 3, mais sans définition vraiment opérationnelle en dimension supérieure. Le lecteur pourra vérifier facilement sur l'intégrale de Green que cette façon de faire conduit effectivement à adopter sur le contour Γ le sens de circulation *clockwise*. De plus dans la procédure de Hestenes le vecteur ∇ se trouve automatiquement placé à la *droite* du volume orienté dV .

A contrario la procédure Doran/Lasenby, que j'appellerai constructive, définit automatiquement les orientations relatives de $\mathcal{M}$ et $\partial\mathcal{M}$ par la k-angulation. La *normale* à utiliser éventuellement pour telle configuration particulière est un cas d'espèce ; elle ne joue pas de rôle dans l'orientation. De plus par construction ∇ se trouve placé à *gauche* de dV .

La première procédure conviendra peut-être plus au mathématicien pur ; la seconde pourrait plaire davantage au programmeur.

G.Ringeisen

Juillet 2009

[1] Geometric Algebra for Physicists – Cambridge University Press

[2] Multivector Calculus – Internet

3. Cela est très « hestenien » : construire les définitions mathématiques de manière telle que la démonstration des théorèmes et propriétés soit la plus simple possible.