Le pendule de Foucault, vu en algèbre géométrique.

On sait qu'une résolution complète du pendule simple implique des intégrales elliptiques. Il est clair que l'étude du pendule double rigide se révèlera encore plus complexe. Je me suis demandé si l'utilisation de l'algèbre géométrique permettrait de réaliser un certain progrès par rapport aux méthodes traditionnelles, en particulier pour la théorie du pendule de Foucault.

Dans la suite de l'exposé je vais utiliser d'une part la GA, d'autre part un théorème d'optimisation en calcul variationnel avec contraintes. Pour en faciliter l'approche au lecteur non familiarisé avec l'une ou/et l'autre technique, je vais d'abord traiter le cas élémentaire du pendule rigide simple.

Le pendule simple.

Soit e un vecteur unitaire dirigé verticalement vers le bas, x le vecteur caractérisant le pendule rigide, θ l'angle orienté $(e,\hat{x})$. On a bien sûr :

(1) $x = l\,\hat{x}$ $\quad\quad$ $\dot{x} = l\,\dot{\theta}\,(d\hat{x}/d\theta)$ $\quad\quad$ $\ddot{x} = l\,\ddot{\theta}(d\hat{x}/d\theta) - l\,\dot{\theta}^2\,\hat{x}$ $\quad\quad$ $\hat{x}.(d\hat{x}/d\theta) = 0$

(2) $E_c = (1/2)m\dot{x}^2$ $\quad\quad$ $E_p = -\,m\,g\,x.e$

Le lagrangien est donc :

(3) $\mathcal{L} = E_c - E_p = (1/2)m\dot{x}^2 + m\,g\,x.e$

Il s'agit de l'optimiser sous la contrainte :

(4) $x^2 = l^2$

La théorie nous dit qu'il faut appliquer les équations d'Euler à un lagrangien élargi :

(5) $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \lambda\,(x^2 - l^2) = (1/2)m\dot{x}^2 + m\,g\,x.e + \lambda\,(x^2 - l^2)$

où λ est une fonction de t nulle quand la contrainte n'est pas satisfaite[1], ce qui n'est jamais le cas ici.

On peut alors écrire [2]:

(6) $\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{x}}\mathcal{H}) - \nabla_x\mathcal{H} = m\,\ddot{x} - m\,g\,e - 2\lambda x = 0$

Dans ce cas très simple il est clair que l'équation (6) n'est autre chose que l'équilibre vectoriel newtonien entre l'accélération et les deux forces agissant sur la masse m du pendule. En particulier $2\lambda x = 2\lambda l\hat{x}$ est la force exercée par la tige.

En multipliant scalairement l'équation (6) successivement par $d\hat{x}/d\theta$ et $\hat{x}$ on obtient :

(7) $m\,\ddot{x}.(d\hat{x}/d\theta) - m\,g\,e.(d\hat{x}/d\theta) = 0$

(8) $m\,l\,\ddot{\theta} + m\,g\,\sin\theta = 0$ $\quad\quad$ $\ddot{\theta} = -\,(g/l)\sin\theta$

(9) $m\,\ddot{x}.\,\hat{x} - m\,g\,e.\,\hat{x} - 2\lambda l = 0$

(10) $2\lambda l = -\,m\,l\,\dot{\theta}^2 - m\,g\,\cos\theta$

On vérfie que $2\lambda l$ est négatif, comme il se doit. L'équation vectorielle (6) a permis à la fois de déterminer l'équation différentielle du mouvement et la force exercée par la contrainte sur le mobile étudié. Il est intéressant de calculer $\dot{\lambda}$:

(11) $2\,l\,\dot{\lambda} = -\,2\,m\,l\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + m\,g\,\dot{\theta}\,\sin\theta = 4\,m\,g\,\dot{\theta}\sin\theta$

1. Je ne donne ici volontairement que le minimum nécessaire d'informations sur le sujet.

2. La seule petite difficulté pour le lecteur novice en GA est ici l'utilisation de la dérivée vectorielle ∇_x , $\nabla_{\dot{x}}$. On pourra vérifier que l'utilisation de coordonnées orthonormées conduit au même résultat.

Le pendule double.

Nous complétons le pendule par une deuxième tige mobile, dans le même plan que la première. Nous appelons y le vecteur correspondant d'origine O, et φ l'angle orienté (e, y). Appelons m_1 la première masse fixée en x , et m_2 la deuxième masse fixée en $(x+y)$. On pose :

(12) $x = l\hat{x}$ $\qquad y = k\hat{y}$

Donc :

(13) $\mathcal{L} = (1/2)m_1\dot{x}^2 + (1/2)m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_1 g x.e + m_2 g(x+y).e$

(14) $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \lambda(x^2 - l^2) + \mu(y^2 - k^2)$

(15a) $\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{x}}\mathcal{L}) - \nabla_x\mathcal{L} - 2\lambda x = 0$

(15b) $\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{y}}\mathcal{L}) - \nabla_y\mathcal{L} - 2\mu y = 0$

(16a) $m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} + \ddot{y}) - m_1 g e - m_2 g e - 2\lambda x = 0$

(16b) $m_2(\ddot{x} + \ddot{y}) - m_2 g e - 2\mu y = 0$

Pour éliminer les fonctions inconnues λ et μ il faut multiplier scalairement les équations (16a) et (16b) respectivement par $(d\hat{x}/d\theta)$ et $(d\hat{y}/d\varphi)$.

(17a) $(m_1 + m_2)\ddot{x}\,.(d\hat{x}/d\theta) + m_2\,\ddot{y}.\,(d\hat{x}/d\theta) - (m_1 + m_2)g e.\,(d\hat{x}/d\theta) = 0$

(17b) $m_2(\ddot{x} + \ddot{y}).(d\hat{y}/d\varphi) - m_2 g e.(d\hat{y}/d\varphi) = 0$

Rappelons et complétons les équations (1) :

(18a) $x = l\,\hat{x}$ $\qquad \dot{x} = l\,\dot{\theta}\,(d\hat{x}/d\theta)$ $\qquad \ddot{x} = l\,\ddot{\theta}(d\hat{x}/d\theta) - l\,\dot{\theta}^2\,\hat{x}$ $\qquad \hat{x}.(d\hat{x}/d\theta) = 0$

(18b) $y = k\,\hat{y}$ $\qquad \dot{y} = k\,\dot{\varphi}\,(d\hat{y}/d\varphi)$ $\qquad \ddot{y} = k\,\ddot{\varphi}(d\hat{y}/d\varphi) - k\,\dot{\varphi}^2\,\hat{y}$ $\qquad \hat{y}.(d\hat{y}/d\varphi) = 0$

On en déduit les équations différentielles couplées suivantes :

(19a) $(m_1 + m_2)l\,\ddot{\theta} + m_2\,k\,\ddot{\varphi}\,\cos(\varphi - \theta) - m_2\,k\,\dot{\varphi}^2\sin(\varphi - \theta) + (m_1 + m_2)g\,\sin\theta = 0$

(19b) $m_2\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\varphi - \theta) + m_2\,k\,\ddot{\varphi} + l\,\dot{\theta}^2\sin(\varphi - \theta) + m_2\,g\,\sin\varphi = 0$

En multipliant scalairement les équations (16) par $\hat{x}$ et $\hat{y}$ on obtient enfin aisément les valeurs des contraintes aux extrémités des tiges rigides.

Par rapport aux méthodes classiques la GA apporte ici surtout une approche plus synthétique et plus élégante des équations, mais rien de nouveau en ce qui concerne la façon de les résoudre. L'exemple suivant va être à cet égard plus intéressant.

Le pendule de Foucault.

Le pendule de Foucault est un sujet plutôt difficile. La preuve en est qu'il a fallu attendre le milieu du 19ème siècle pour que ses propriétés et les premières explications théoriques soient mises en évidence, alors que des savants aussi éminents que Laplace et Lagrange avaient déjà construit de longue date bon nombre des outils essentiels pour l'étude de la mécanique rationnelle, et en particulier de la mécanique céleste.

Lorsque Foucault a présenté ses conclusions expérimentales à l'Académie des Sciences, son collègue Liouville a semble-t-il aussitôt avancé une explication du phénomène en faisant remarquer que le pendule n'était sensible principalement qu'à la composante verticale, au lieu d'observation, du vecteur rotation instantanée de la Terre. Cette composante a pour mesure $\omega \sin \lambda$, où λ est l'angle de latitude.[3] La durée de rotation du pendule serait donc précisément $24h\ / \sin \lambda$. Les analyses théoriques détaillées montrent qu'il faut apporter de légères corrections à ce chiffre.

Ceci étant dit on succombe assez facilement à la tentation de considérer que le pendule doit osciller dans un plan fixe par rapport aux étoiles et que celui-ci tourne donc précisément à la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda$ par rapport à un repère terrestre. Or des considérations de géométrie élémentaire montrent, en considérant deux situations quelconques non infiniment proches, qu'il n'est pas possible que les deux plans puissent être parallèles, c'est à dire confondus[4] ! Cette explication simpliste est donc fausse ; néanmoins la trace des plans d'oscillation sur les plans horizontaux des lieux d'observation répond bien en première approximation à la loi indiquée.

Je me suis donc demandé si l'algèbre géométrique, qui fournit l'instrument idéal d'étude des rotations, permettrait de démontrer de manière simple cette propriété, sans entrer dans les considérations peu intuitives des méthodes usuelles de changement de repères, et surtout sans nécessiter une résolution effective des équations du mouvement du pendule.

L'idée de base est la suivante : partant d'un repère initial galiléen fixe par rapport aux étoiles *(repère 1)*, et de sa transformation en repère terrestre fixe par rapport à la terre (axes initiaux en coïncidence et origine commune - *repère 2*), donc soumis à la rotation terrestre, ajoutons un troisième repère animé par rapport au précédent d'une rotation d'axe $\hat{x}$ vertical et de vitesse angulaire $\omega\ \sin\lambda$ de sens inverse à la rotation terrestre *(repère 3)*. Nous voulons démontrer qu'un pendule lancé avec une vitesse initiale nulle dans le repère terrestre (*repère 2* donc) demeurera dans un plan contenant $\hat{x}$ et dont la trace sur le *repère 3* restera fixe, au second ordre près d'une durée δt courte (c'est à dire pour fixer les idées pendant un aller-retour du pendule). Si tel est le cas il est clair que la trace de ce plan dans le *repère 2* (celui de l'observation donc, à une translation près) tournera en sens inverse de la rotation terrestre, effectivement à la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda$.

En un mot, pour reprendre l'idée sans doute intuitive de Liouville, nous nous débarrassons dans le troisième repère de la composante active du vecteur rotation terrestre pour ne garder que la composante passive, perpendiculaire à $\hat{x}$.

C'est tout ceci que nous allons maintenant essayer d'exprimer et de démontrer mathématiquement. Il serait possible de le faire en algèbre de Gibbs, mais c'est tellement plus beau et plus facile en GA... !

Il sera utile pour le lecteur de tracer un petit schéma, situant dans un même plan le vecteur unitaire d'axe terrestre w ainsi que le vecteur ωw représentant la vitesse angulaire, les vecteurs x et $\hat{x}$ correspondant à la position et à la direction du point d'accrochage du pendule, l'angle de latitude λ , le vecteur unitaire u orienté vers le bas et perpendiculaire à $\hat{x}$, enfin hors du plan et dirigé vers l'arrière le vecteur v complétant le trièdre orthonormé direct $(u, v, \hat{x})$[5]. On a évidemment les relations suivantes :

$$(20) \qquad uv\hat{x} = u \wedge v \wedge \hat{x} = I$$

$$(21) \qquad w = w.\hat{x}\,\hat{x} + w \wedge \hat{x}\,\hat{x} = \hat{x}\sin\lambda - u\cos\lambda$$

On effectue alors une première rotation infinitésimale de ce repère pour suivre le mouvement terrestre. Alors y étant un vecteur quelconque *attaché au repère absolu* $[u(t_0), v(t_0), \hat{x}(t_0)]$, ce vecteur devient :

$$(22) \qquad y \quad \rightarrow \quad y + (\omega\delta t)\, y.(wI) + \delta t\, \vec{O}(\delta t) = y + (\omega\delta t)\, y \wedge wI) + \delta t\, \vec{O}(\delta t)$$

3. Il serait évidemment intéressant de connaître l'argumentation précise utilisée par Liouville.

4. Car ils ont un point commun : l'origine, centre de la terre.

5. Pour des raisons de commodité de travail en GA nous fixons l'origine de tous les repères utilisés au même point, centre de la terre. Le repère terrestre classique présenterait l'inconvénient d'avoir un point origine mobile. Nous serons cependant amené à l'utiliser à titre auxiliaire (repère (4)).

la deuxième rotation donne :

$$(23)\qquad y+\delta_1 y \;\rightarrow\; y+\delta_1 y-(y+\delta_1 y\,)\wedge\hat{x}\,I(\omega\sin\lambda\,\delta t)+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)$$

$$=y+(\omega\,\delta t)y\wedge(w-\sin\lambda\,\hat{x})I+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)$$

$$=y-(\omega\,\delta t\cos\lambda)y\wedge u\,I+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)=y-(\omega\,\delta t\cos\lambda)y.(u\,I)+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)$$

En définitive :

$$(24)\qquad \delta y=-\,(\omega\delta t\cos\lambda)y.(u\,I)+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)=-\,(\omega\delta t\cos\lambda)y.(v\wedge\hat{x}\,)+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)$$

$$=-\,(\omega\delta t\cos\lambda)(y.v\,\hat{x}\,-\,y.\hat{x}\,v)+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)$$

En particulier nous avons :

$$(25)\qquad \delta u=0+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)\qquad \delta v=-\,(\omega\,\delta t\cos\lambda)\hat{x}+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)\qquad \delta\hat{x}=(\omega\,\delta t\cos\lambda)v+\delta t\,\vec{O}\,(\delta t)$$

Nous passons donc du repère inertiel de base *(repère 1)* au repère final *(repère 3)* par une rotation instantanée d'axe u et d'angle $(-\,\omega\delta t\cos\lambda)$. La composition des deux rotations, la première autour de l'axe terrestre w , la seconde autour de l'axe vertical du lieu d'observation, conduit donc à garder fixe dans l'*espace absolu (repère 1)* le vecteur $u(t_0)$, qui peut donc être retenu comme repère directionnel pour la trace horizontale (z) du plan instantané du mouvement pendulaire[6].

Nous espérons donc démontrer que la *variation* de l'angle $(u,\,z)$ est nulle au second ordre près. Nous appelons maintenant $y(t)$ le vecteur de position du pendule et $x(t)$ la position de son point d'accrochage [7] [8]. Le bras du pendule est donc figuré à chaque instant par le vecteur $[y(t)-x(t)]$. Nous admettons qu'à l'instant où nous étudions la question le pendule oscille dans un plan (P_0) défini par l'origine, par $x(t_0)$ et par $y(t_0)$. Si nous voulons écrire les équations de la dynamique pour ce pendule *dans le repère 3*, coïncidant avec le *repère 1* à l'instant t_0 , nous devons ajouter aux forces s'exerçant sur le pendule une force centrifuge et une force de Coriolis.[9]

La première qui représente à Paris environ 1/1000 de l'effet de la pesanteur s'écrit vectoriellement :

$$(26)\qquad f_{C1}=-\,\omega^2\cos^2\!\lambda[\,y\,.(u\,I)].(u\,I)=-\,\omega^2\cos^2\!\lambda[\,y.(v\wedge\hat{x})].(u\,I)$$

$$=-\,\omega^2\cos^2\!\lambda(y.v\,\hat{x}\,-\,y.\hat{x}v)(v\wedge\hat{x}\,)=\omega^2\cos^2\!\lambda\,(y.v\,v+y.\hat{x}\,\hat{x})$$

$$=\omega^2\cos^2\!\lambda\,(y-x).v\,v+\omega^2\cos^2\!\lambda|y|\hat{y}.\hat{x}\,\hat{x}$$

La seconde s'exprime, en appelant v_r la vitesse relative dans le repère (3) de la masse pesante du pendule, par :

$$(27)\qquad f_{C2}=-\,2\omega\,\cos\lambda\,v_r\,.(-\,u\,I)=2\omega\,\cos\lambda\,[\dot{y}+\omega\,\cos\!\lambda\,y\,.(u\,I)].(u\,I)$$

Appelons v_p la vitesse relative du pendule dans le repère terrestre *(repère 4)* attaché au point x et qui tourne avec la terre, celui donc que nous observons réellement.[10] Il est facile de démontrer que $|\dot{y}\,-\,\dot{x}\,|$ est du même ordre de grandeur que $|v_p\,|$. Pour un pendule de 100 cm de longueur, dépassant en fin de course de 10 cm son niveau le plus bas on observe une vitesse variant entre 0 et 140 cm/s. Plus précisément nous pouvons écrire :

6. Un calcul plus poussé montre d'ailleurs que le terme du deuxième ordre de δu est colinéaire avec u .

7. N'oublions pas que ces deux vecteurs, de même que les vecteurs de base initiaux , sont définis par construction dans l'absolu. Ajoutons tout de suite que toute dérivée , notée $\dot{y}$ par exemple, est définie dans l'absolu, hors coordonnées.

8. On note l'importance du choix de la valeur $\omega\sin\lambda$ pour la vitesse de rotation autour de l'axe $\hat{x}$; c'est le fait d'avoir choisi cette valeur qui détermine les intéressantes propriétés du vecteur u.

9. On note que ce calcul n'impose pas que l'angle (u,z) soit nul à l'instant t_0.

10. Ce repère se déduit du repère (2) par une translation $x(t)$. Nous ne l'utilisons que pour obtenir la relation (28).

$$(28) \qquad \dot{y} - \dot{x} = v_p + \omega(y-x).(wI)$$

En tirant parti de la relation (21) nous écrivons (27) sous la forme :

$$
\begin{aligned}
(29) \qquad f_{C2} &= 2\omega\cos\lambda\,[(v_p + \dot{x} + \omega(y-x).(wI) + \omega\,\cos\lambda\, y.(uI)].(uI)\\
&= 2\omega\cos\lambda\,[(v_p + \omega x.(wI) + \omega(y-x).(wI) + \omega\,\cos\lambda\, y.(uI)].(uI)\\
&= 2\omega\cos\lambda\,[(v_p + \omega y.(\hat{x}\,I)\sin\lambda].(uI)\\
&= 2\omega\cos\lambda\,[(v_p + \omega(y-x).(\hat{x}\,I)\sin\lambda].(uI) + 2\omega\,\cos\lambda\,\sin\lambda[x.(\hat{x}\,I)].(uI)\\
&= 2\omega\cos\lambda\,[(v_p + \omega(y-x).(\hat{x}\,I)\sin\lambda].(uI) + 0\\
&= 2\omega\cos\lambda\, v_p\,.(uI) + 2\omega^2\sin\lambda\,\cos\lambda[(y-x).(\hat{x}\,I)].(uI)\\
&= 2\omega\cos\lambda\, v_p\,.(v\wedge\hat{x}) + 2\omega^2\sin\lambda\,\cos\lambda\,(y-x).u\,\hat{x}\\
&= -\,2\omega\cos\lambda\, v_p\,.\hat{x}\,v + 2\omega\cos\lambda\, v_p\,.v\,\hat{x} + 2\omega^2\sin\lambda\,\cos\lambda\,(y-x).u\,\hat{x}
\end{aligned}
$$

Il convient d'abord d'insister sur le fait que *ces résultats ne sont pas une approximation*, mais représentent le calcul rigoureux de toutes les forces. On constate ensuite que trois termes sont colinéaires avec $\hat{x}$ et n'exercent donc aucune action sur la position du plan P_0 . Enfin les deux termes actifs sont extrêmement faibles en comparaison de l'action principale exercée sur la vitesse linéaire du pendule par la gravité, pratiquement colinéaire avec $\hat{x}$ dans le plan P_0 .

Avec les éléments déjà indiqués, on peut estimer[11] :

$|y-x| = 100\,\text{cm} \qquad |x| = 6,4\,10^8\,\text{cm} \qquad \omega = 7,3\ 10^{-5}\,\text{radians}/s \qquad \omega^2 = 5,3\ 10^{-9}\,\text{radians}/s^2$

$$2\omega\, v_p\,.\,\hat{x} \simeq 10^{-6}\ \text{cm}/s^2 \qquad \omega^2\,(y-x).v \simeq 10^{-8}$$

On peut donc affirmer que les effets résiduels de Coriolis et de la force centrifuge n'écartent pas le pendule du plan P_0 , dans le *repère 3*. Donc l'angle $(u,\,z)$ est stationnaire, c'est à dire ne varie pas dans la *rotation instantanée* faisant passer du *repère 1* (absolu) au *repère 3* (terrestre corrigé) au moment précis de l'observation.

Ce raisonnement, vrai à l'instant t_0 , peut être répété à chaque instant $t_0 + \delta t$, $t_0 + 2\delta t$, etc ... , pour passer *de chaque nouveau repère (2) au repère (3) qui lui correspond*. Donc l'angle $[u(t),\, z(t)]$, stationnaire à chaque instant, reste en définitive constant, aux irrégularités d'ordre supérieur près, dans cette succession de changement de repères, pour toute évolution temporelle Δt finie.

De ce fait dans le repère (2), celui de l'observation terrestre (avec origine au centre de la terre), la figure formée par l'angle $[u(t),\, z(t)]$ et donc la trace $z(t)$ du plan d'oscillation tourneront en sens inverse de la rotation du globe terrestre, d'une quantité $\omega\,\Delta t\,\sin\,\lambda$, par sommation des effets infinitésimaux de la succession des retours des repères (3) au repère (2) mobile [12].

Il est intéressant d'ailleurs de noter que l'on peut établir directement la rotation de $u(t)$ par l'équation (22) qui donne :

$$
\begin{aligned}
(30) \qquad u \quad \to \quad & u + (\omega\delta t)\,u.(wI) + \delta t\,\vec{O}\,(\delta t) = u + (\omega\delta t)\,u\wedge w\,I + \delta t\,\vec{O}\,(\delta t)\\
&= u + (\omega\,\delta t\sin\lambda)\,u\wedge\hat{x}\,I + \delta t\,\vec{O}\,(\delta t) = u + (\omega\,\delta t\sin\lambda)v + \delta t\,\vec{O}\,(\delta t)
\end{aligned}
$$

Cette relation traduit le fait que dans le mouvement du repère 2 le vecteur $u(t)$ subit un transport non-parallèle [13] sur la sphère terrestre, qui le fait tourner par rapport à la direction matérialisée initialement par $u(t_0)$[14] . Ce mouvement infinitésimal est intégrable dans le repère 2 .

11. On peut d'ailleurs aisément se rendre compte que l'action de ces forces seraient encore considérablement réduite si on la moyennait sur un balancement complet du pendule.

12. On observera bien sûr cette rotation de $\hat{z}$ dans le repertoire terrestre lié au point x , mais la rotation de u n'y sera pas matérialisée, sauf si l'angle initial était nul.

13. Pour ce sujet, qui dépasse la cadre de la présente note , on pourra se reporter par exemple à http://www.nd.edu/jvonberg/Jens von Bergmann's Homepage˙files/foucault.pdf

Donc pour résumer schématiquement notre démonstration :

-- nous définissons les trois repères, dont le dernier a le mérite de rendre stationnaire le vecteur de référence $u(t_0)$ tout en réduisant l'impact sur le pendule des effets dynamiques ;

-- nous constatons que les effets résiduels dynamiques n'écartent pas, à un ordre supérieur près, le pendule de son plan instantané d'oscillation observé dans le repère (3) ;

-- nous en déduisons la stationarité de l'angle $[u(t), z(t)]$ et son mouvement dans le repère (2) ;

-- nous constatons en outre que le mouvement de rotation $(\omega\delta t \sin\lambda)$ du vecteur $u(t)$ s'explique par son transport non-parallèle sur la surface terrestre non euclidienne.

Tout ceci explique l'apparent paradoxe de la trace qui bouge dans le repère (2) comme si le plan d'oscillation restait fixe par rapport aux étoiles, alors qu'il n'en est rien[15].

Nous n'avons à aucun moment cherché à résoudre les équations dynamiques du pendule. Notre conclusion rejoint donc l'opinion exprimée dès l'origine par l'illustre géomètre Poinsot, qui estimait que la précession du pendule devait s'expliquer par de simples considérations cinématiques. Les calculs usuels font certes appel aux forces fictives dites de Coriolis et centrifuges, mais il s'agit bien de forces générées par la cinématique.

G.Ringeisen

Octobre 2009

Révisé août 2011

14. Essayons d'être un peu plus précis. Dans le repère 2 l'observateur terrestre garde $u(t)$, dont il ne perçoit pas la rotation, comme vecteur de référence pour le repérage du plan du pendule. Si au point $x(t)$ on traçait le vecteur $u(t_0)$ après l'avoir déplacé parallèlement le long du cercle - non géodésique - de latitude, on s'apercevrait que ce vecteur donc aurait accompli une rotation de $[-\omega(t-t_0)\sin\lambda]$ autour de $\hat{x}(t)$. Or la trace du pendule reste fixe par rapport à ce vecteur de référence mobile.

15. Un lecteur très rigoureux pourrait se demander si nous n'aurions pas dû faire ces analyses dans le repère 4 . En fait cela ne changerait rien pour la rotation des repères, mais il faudrait ajouter un troisième terme correctif :

$$-\ddot{x} = -\omega^2[x.(Iw)].(Iw) = \omega^2 x\cos^2\lambda + \omega^2\sin\lambda\cos\lambda|x|u$$

Le terme actif résiduel est de l'ordre de 3/1000 de la gravité, mais de toute évidence s'annule en moyenne sur un balancement du pendule. En fait cet aspect du problème est traité en général en remplaçant la gravité newtonienne vraie par une gravité apparente de direction apparente fixe dans le repère 2 . La rotation apparente du plan du pendule se fait alors autour de ce nouvel axe. Toutefois -- comme pour les poupées russes -- cette correction doit elle-même être révisée par un élément du même ordre de grandeur : le fait que la terre est plus proche d'un sphéroïde de Clairault (voir Wikipedia) que d'une sphère parfaite. Nous n'entrerons pas dans ces complications.