Excursion en "algèbre géométrique".

1.Préambule.

Vers la fin des années 70, feuilletant au hasard d'une visite en librairie quelques ouvrages scientifiques je tombai sur un petit livre au titre anodin, - "L'Algèbre Vectorielle"-, par G.Casanova[1]. Mon instinct de mathématicien et physicien amateur me poussa à l'acquérir.

Sa lecture me surprit beaucoup, m'intéressa vivement, mais ne me conduisit pas très loin dans le sujet étudié. Pour des raisons diverses, manque de temps, insuffisance de connaissances dans les domaines abordés, notamment en mécanique quantique, j'abandonnai le sujet.

Il faut dire que l'exposé de G.Casanova était certes clair et rigoureux, mais d'une redoutable densité, dans une collection en principe vouée à la "vulgarisation". Le lecteur amateur risquait d'en retirer l'impression décourageante que le calcul de Clifford, sujet du petit livre, était séduisant dans son principe mais trop difficile à maîtriser.

Au fil des ans je revins plusieurs fois sur le sujet, mais sans conviction suffisante, et j'en gardai une impression de frustration.

Vingt ans après ce premier contact, disposant d'un peu plus de loisirs et poursuivant ma quête de sujets scientifiques nouveaux à explorer, je tapai "Clifford" sur un bon moteur de recherche internet. Une abondante littérature, très majoritairement anglo-saxonne - en tout cas pas française -, apparut aussitôt, et un nom s'imposa d'emblée, celui de David Hestenes. Je me rendis compte qu'il figurait dans la bibliographie donnée par G.Casanova, mais n'avait pas attiré mon attention lors de ma première lecture. Par une curieuse coïncidence cependant, que je n'avais pas perçue, j'étudiais à cette époque là un remarquable ouvrage sur le contrôle optimal rédigé par le père de David, Magnus R.Hestenes, éminent mathématicien enseignant le calcul des variations à UCLA. Je ne peux m'empêcher aujourd'hui d'y voir un signe ; sans doute étais-je prédestiné à entreprendre le voyage dont je vais essayer de vous faire apprécier les merveilles.

Revenons à internet et aux nombreux documents, études, thèses, que j'y collectai. Je découvris rapidement que David Hestenes avait engagé à partir du milieu des années 60 un combat solitaire de plus de vingt ans pour réhabiliter, développer, exploiter concrètement l'algèbre dite de Clifford. Au fur et à mesure que se développait ma maîtrise du sujet, encore toute relative, j'étais davantage fasciné par les immenses possibilités qu'offrait cette algèbre et notamment par le fait qu'elle permettait au néophyte que j'étais d'aborder, avec un minimum de connaissances préalables, des domaines très variés, bien plus facilement qu'à l'aide de tout autre outil mathématique. Au risque de faire sourire certains lecteurs devant mon enthousiasme juvénile (!), je dirai qu'à chaque visite sur les sites internet correspondants j'avais le sentiment d'entrer dans la caverne d'Ali Baba et d'avoir enfin le droit de fouiller dans ses coffres remplis de trésors.

Mais il est temps de faire un bref rappel historique. Pendant le 19ème siècle, disons entre 1830 et 1880, furent développés successivement ou simultanément plusieurs systèmes algébriques.

En Angleterre il y eut d'abord William Rowan Hamilton (1805-1865), qui inventa (faut-il dire découvrit ?...) les quaternions, en vue de représenter les rotations en espace euclidien tridimensionnel. Ce système généralisait en trois dimensions les nombres complexes.

Simultanément en Allemagne Hermann Günther Grassmann (1809-1877) créa l'algèbre extérieure, en définissant et en généralisant la notion de produit extérieur $a \wedge b$ de deux vecteurs. Son oeuvre fut largement ignorée de son vivant, mais fut ultérieurement à la source de développements majeurs dans divers domaines des mathématiques.

En 1878 William Kingdom Clifford (1845-1879), qui était l'un des rares mathématiciens ayant lu et compris Grassmann, créa son algèbre géométrique (c'est le nom qu'il lui donnait), en associant les notions de produit extérieur et de produit intérieur de vecteurs et multivecteurs dans un produit géométrique doté de puissantes propriétés.

Malheureusement Clifford mourut à l'âge de 34 ans et son système ne s'imposa pas, d'autant plus que J.W.Gibbs (1839-1903), professeur à Yale, créa son calcul vectoriel, apparemment plus simple et bien adapté à la physique prérelativiste de la fin du 19ème siècle. C'est ce calcul, avec ses développements ultérieurs dans la lignée de Grassmann, calcul tensoriel, formes différentielles extérieures, etc..., qui est encore aujourd'hui enseigné dans nos universités et écoles d'ingénieurs.

De la sorte l'algèbre de Clifford, qui aurait pu être l'outil idéal pour la relativité et pour la mécanique quantique, fut oubliée pendant près de 100 ans, ou en tout cas reléguée au rang d'une spécialité algébrique mineure.

David Hestenes bénéficia d'une triple formation de philosophe, de mathématicien et de physicien. Ainsi qu'il le raconte dans l'un de ses textes, il fut impressionné par la lecture de leçons rédigées par le mathématicien Marcel Riesz sur "les nombres de Clifford et les spineurs". Il réalisa soudain que les matrices intervenant dans la théorie relativiste de l'électron, conçue par Dirac, pouvaient être assimilées à des vecteurs. Cette algèbre matricielle recevait ainsi une formulation toute nouvelle, qui ne pouvait pas rester sans conséquences sur la façon de concevoir et de comprendre la mécanique quantique dans son ensemble.

Les années de recherche qui suivirent le persuadèrent qu'il fallait privilégier l'interprétation géométrique des nombres de Clifford et non pas leur caractère algébrique abstrait. Il s'engagea ainsi dans la voie d'une refondation d'un outil mathématique universel, s'appliquant à bien d'autres domaines que la mécanique quantique. Son idée semble être d'introduire l'apprentissage de ce calcul dès les premiers stades de l'enseignement universitaire des mathématiques.

Cette tâche ambitieuse ne pouvait pas ne pas se heurter à de sérieuses résistances, d'autant plus que David Hestenes s'attaqua, d'abord prudemment, puis avec plus de vigueur à la terrible forteresse de l'interprétation "de Copenhague" de la mécanique quantique. Il y avait là de quoi briser la carrière d'un jeune physicien, et je ne peux m'empêcher d'éprouver une sincère admiration pour le courage et l'obstination de ce chercheur solitaire, qui dut attendre plus de vingt ans pour voir un début de reconnaissance de ses idées.

En effet depuis le milieu des années 80 il y a eu des colloques et conférences internationales consacrés aux récents développements de l'algèbre de Clifford, que Hestenes préfère appeler GA (geometric algebra) et GC (geometric calculus). D'autre part de nouveaux pôles de recherche sur ces sujets se sont créés aux USA, en Angleterre (Cambridge), aux Pays Bas. On me pardonnera de me référer à des dénominations anglo-saxonnes sans chercher à les traduire, mais il faut bien reconnaître que la France paraît curieusement absente dans ce domaine, alors pourtant que Hestenes cite de jeunes chercheurs français, dont G.Casanova, parmi ses premiers étudiants motivés. En consultant aujourd'hui les sites purement francophones sur internet on ne trouve que le petit livre déjà cité, datant de 1976..., ou de brefs textes très abstraits confinant l'algèbre de Clifford dans son rôle de bête curieuse du zoo mathématique. Tout se passe comme si la flambée française des années 70 était complètement retombée, du moins dans le domaine de la physique.

Tous ces éléments m'ont poussé à rédiger le présent texte, évidemment largement inspiré par mes lectures. Il est trop bref pour prétendre apporter au lecteur même un début de formation en matière de GA; il vise simplement à le faire participer à une belle excursion, à lui faire entrevoir les merveilles de la "caverne", et peut-être à l'inciter à entreprendre lui-même un voyage plus approfondi. Je ne revendique pour ma part qu' un rôle de chroniqueur scientifique. On trouvera en annexe une bibliographie très sommaire, renvoyant pour l'essentiel à internet.

2.Premiers pas.

On peut donner une présentation extrêmement ludique de la GA, tout en produisant un choc psychologique chez le lecteur (voir Bill Pezzaglia[2] ou Leo Dorst[3]), en disant qu'elle permet d'additionner, multiplier, diviser, ..., des points, des lignes, des parallélogrammes, des parallélépipèdes à 3, 4, ..., n dimensions !

Certains lecteurs, même très éminents, ont du mal à s'en remettre et préfèrent considérer qu'il ne s'agit là que de procéder aux dites manipulations sur des matrices. C'est un point de vue rassurant, et vrai sur le plan mathématique strict, puisque toute algèbre associative, non commutative, peut être représentée ainsi. Mais sans doute vaut-il mieux ne pas garder cette image en tête, car elle nuit à l'interprétation géométrique très fertile que permet la GA. De surcroît on n'a jamais besoin en pratique de faire appel à de telles matrices pour expliciter les résultats obtenus.

Considérons donc un espace E_n à n dimensions, doté d'une forme quadratique Q. Dans un premier temps on pourra se contenter d'imaginer un espace euclidien classique, bi- ou tridimensionnel, mais on verra rapidement que les généralisations à des espaces n-dimensionnels et à des formes quadratiques pseudoeuclidiennes ne présentent aucune difficulté. On pourra se donner des bases dans ces espaces, en général orthonormées, mais on ne les utilisera qu'en tant que de besoin, car l'un des avantages fondamentaux de la GA est d'être indépendante de tout choix de bases (et même de l'orientation des bases, à la différence du calcul vectoriel ordinaire). L'espace vectoriel E_n est construit sur les réels, car comme on le verra il n'est point besoin de faire appel aux nombres complexes dans GA, puisque nous avons beaucoup mieux... . A E_n est associé un espace $\mathcal{G}_n$ à 2^n dimensions qui contient tous les éléments de GA construits à partir de E_n . Ceci n'est peut-être pas très clair, mais les nuages vont vite se dissiper.

Soient a et b deux vecteurs de E_n ; nous écrivons :

(1) $$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$

En vertu de l'existence de Q le premier membre et les deux premiers termes du second membre sont des scalaires ; donc $ab + ba$ est également un scalaire, et l'on peut définir le produit intérieur de deux vecteurs, qui coïncide avec la notion classique :

(2) $$a.b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

Ceci est la partie symétrique du produit géométrique ab ; on est tenté d'y associer une partie antisymétrique, appelée produit extérieur, en écrivant :

(3) $$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)$$

(4) $$ab = a.b + a \wedge b$$

Le produit extérieur de deux vecteurs est bilinéaire (ceci est la conséquence des hypothèses de distributivité du produit géométrique). Bien entendu $a \wedge b = -b \wedge a$. Il s'agit évidemment d'une entité nouvelle, ni scalaire ni vecteur, mais d'un bivecteur que l'on peut préciser quelque peu. Dans le plan P défini par les deux vecteurs on peut choisir deux vecteurs unitaires e_1, e_2 orthonormés, par rapport auxquels a et b sont définis par leurs coordonnées. Tous calculs faits dans le plan P on obtient :

(5) $$a \wedge b = (a^1b^2 - a^2b^1)e_1 \wedge e_2 = (a^1b^2 - a^2b^1)e_1e_2$$

Cette expression nous est familière ; nous voyons que le rapport (scalaire) entre les bivecteurs $a \wedge b$ et $e_1 \wedge e_2$ est égal à la surface, avec son signe, du parallélogramme construit sur les vecteurs a et b . Nous voyons aussi que l'un ou l'autre de ces bivecteurs fixe l'orientation du plan. Si par exemple e_1 change de sens, la surface change de signe et $a \wedge b$ reste inchangé.

De toute évidence les équations (1) à (5) ne dépendent pas du nombre de dimensions de l'espace vectoriel considéré. Plaçons nous cependant un instant dans un espace tridimensionnel, dont le plan P ci-dessus examiné constitue l'un des plans de base. Notre troisième vecteur de base sera e_3 , perpendiculaire au plan P. En algèbre de Gibbs nous pouvons alors définir le produit vectoriel :

(6) $$c = a \times b = (a^1 b^2 - a^2 b^1) e_1 \times e_2 = (a^1 b^2 - a^2 b^1) e_3$$

Cette relation algébrique ne dit rien sur l'orientation de e_3 par rapport au plan P, ou sur le fait que le trièdre (e_1, e_2, e_3) devrait être direct. Si l'on change le sens de e_3 l'expression $(a^1 b^2 - a^2 b^1)$ ne change pas, et le vecteur c se transforme en $-c$. La direction du produit vectoriel, que l'on appelle pour cette raison vecteur axial, dépend donc de l'orientation adoptée pour le repère de base. C'est une différence essentielle avec le produit extérieur $a \wedge b$, qui comme tous les éléments de $\mathcal{G}_n$, est indépendant de tout repère. Nous en reparlerons.

Revenant à nouveau au cas général des espaces E_n et $\mathcal{G}_n$ nous indiquons les formules suivantes, étendant les équations (2), (3), (4) :

(7) $$a A_p = a.A_p + a \wedge A_p$$

(8) $$2a.A_p = a A_p - (-1)^p A_p a$$

(9) $$2a \wedge A_p = a A_p + (-1)^p A_p a$$

Elles sont équivalentes, pour un produit extérieur décomposable, à la définition simple :

(10) $$A_p = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots\ldots \wedge a_i \wedge \ldots\ldots \wedge a_p$$

Tous les A_p ne sont pas décomposables, pour $n > 3$, mais forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}_n$ ayant la dimension C_n^p . Par construction A_p est nul si $p > n$. $\mathcal{G}_n$ est constitué de la somme directe de ces sous-espaces, et a donc bien la dimension 2^n . Les A_p décomposables sont complètement antisymétriques. Ces sous-espaces sont évidemment isomorphes avec les espaces de tenseurs antisymétriques correspondants.

Bien entendu les produits extérieurs sont, comme les produits géométriques en général (par définition axiomatique), associatifs. On se souvient que le produit vectoriel en E_3 n'a pas cette propriété.

Pour le produit intérieur nous ne donnerons qu'une formule simple, particulièrement utile :

(11) $$a.(b \wedge c) = (a.b)c - (a.c)b$$

Sa généralisation se devine aisément.

Si nous définissons dans E_n une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n)$, les bases des sous-espaces de $\mathcal{G}_n$ sont constituées par les multivecteurs linéairement indépendants construits sur cette base vectorielle. Le multivecteur (unique) de rang le plus élevé associé à la base orthonormée est défini comme suit :

(12) $$i = e_1 e_2 \ldots\ldots e_n = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots\ldots. \wedge e_n$$

Il s'agit d'un pseudoscalaire que nous appelons i par commodité (certains auteurs préfèrent I), car dans les espaces intéressants pour la physique il jouit de la propriété remarquable :

(13) $$i^2 = -1$$

Il faut toutefois se garder de le confondre avec l'imaginaire pur i , qui n'existe pas en GA. D'autre part de nombreux multivecteurs de base construits dans $\mathcal{G}_n$ possèdent cette même propriété. Comme on le verra ces pseudoscalaires permettront de géométriser quantité de phénomènes allant de simples rotations dans E_2 au spin de l'équation relativiste de l'électron de Dirac, en passant par les transformations de Lorentz en STA (space-time algebra), dans un espace pseudo-euclidien dit de Minkowski.

On définit la notion de dualité, la multiplication d'un A_p par i le transformant en A_{n-p} . Nous verrons cela plus en détail en dimensions 2, 3 et 4 .

3.GA en deux et trois dimensions.

Nous avons déjà donné quelques indications sur la GA dans le plan. L'espace $\mathcal{G}_2$ est constitué par des scalaires, des vecteurs, et des pseudoscalaires. Il a $1+2+1=4$ dimensions. On vérifie les relations de dualité, par exemple :

(14) $\quad i\,e_1 = e_1 e_2 e_1 = -e_2 \qquad e_1 i = e_1 e_1 e_2 = e_2$

On en déduit que le dual de tout vecteur est un vecteur, que tout vecteur anticommute avec i :

(15) $\quad i\,a = -\,a i$

et que la multiplication d'un vecteur repectivement à droite ou à gauche par i entraîne une rotation positive ou négative d'angle $\pi/2$ de ce vecteur. On obtient ainsi le même effet que par la multiplication de nombres complexes, par une opération purement géométrique.

On peut préciser cela en établissant un isomorphisme dans le plan entre les vecteurs de la GA et les nombres complexes. Il suffit de multiplier a par le vecteur unitaire fixant l'axe des réels, e_1 :

(16) $\quad e_1 a = a^1 + i\,a^2$

En appelant i' l'imaginaire pur, on obtient l'identification :

(17) $\quad z = x + i' y \qquad z = e_1 a \qquad x = a^1 \qquad y = a^2 \qquad \bar{z} = a\,e_1$

Il est facile d'établir qu'une rotation d'angle φ peut être obtenue par l'une ou l'autre des formules suivantes, dont la signification apparaîtra plus clairement en trois dimensions :

(18) $\quad a \to a' = \exp(-i\varphi)\,a = a\,\exp(i\varphi) = \exp(-i\varphi/2)\,a\,\exp(i\varphi/2).$

L'expression formelle $\exp(i\varphi)$ est définie par son développement en série, qui permet d'écrire :

(19) $\quad \exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\varphi + e_1 e_2 \sin\varphi$

où l'on rappelle que i est un bivecteur de $\mathcal{G}_2$, c'est à dire un pseudoscalaire.

Passons maintenant en 3-d, pour y définir l'algèbre dite d'espace. L'espace $\mathcal{G}_3$ associé à E_3 est constitué de scalaires, vecteurs, bivecteurs, pseudoscalaires. Il a $1+3+3+1=8$ dimensions. Nous appellerons σ_1 , σ_2, σ_3 les vecteurs de base de E_3 . On établit alors aisément les relations suivantes :

(20) $\quad \sigma_i \,.\, \sigma_j = \delta_{ij}$

(21) $\quad \sigma_i \wedge \sigma_j = i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$

(22) $\quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$

ou encore :

(21 bis) $\quad \sigma_1 \wedge \sigma_2 = i\,\sigma_3 \qquad \sigma_2 \wedge \sigma_3 = i\sigma_1 \qquad \sigma_3 \wedge \sigma_1 = i\,\sigma_2$

ainsi que :

(21 ter) $\quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = i$

Tous les multivecteurs de base sont ainsi définis. On montre facilement que i commute avec tous les éléments de $\mathcal{G}_3$ (ce n'est pas le même i qu'en 2-d ....). Il est intéressant d'ajouter à ces définitions la relation qui existe entre le produit vectoriel classique et le produit extérieur. On a en effet :

(21 quater) $$a \times b = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \sigma_k = -i(a \wedge b)$$

Les lecteurs familiarisés avec la mécanique quantique reconnaîtront en (22) la relation de base du calcul matriciel de Pauli, où les σ sont des matrices (2,2) complexes et où i est l'imaginaire unité. On a longtemps pensé que l'algèbre de Pauli avait un caractère spécifiquement quantique, lié à la notion de spin dans un espace abstrait. Il n'en va évidemment pas de même pour la GA où l'on ne parle que de rotations dans notre espace réel, sans a priori quantique. Il n'est donc pas surprenant de voir apparaître des interprétations nouvelles.

Considérons deux vecteurs unitaires n et m , formant un angle $\varphi/2$ compté positivement de n vers m . Soit a un vecteur quelconque. Le lecteur trouvera sans difficulté, en décomposant a en élément colinéaire avec n et élément perpendiculaire, que le produit géométrique (nan) est un vecteur symétrique de a par rapport à n . Si on applique au vecteur résultant une opération identique par rapport à m on va trouver $(mnanm)$ qui représente, comme l'on sait par la géométrie élémentaire, une rotation de a d'un angle φ autour d'un axe perpendiculaire au plan (n, m), convenablement orienté (c'est à dire cohérent avec le bivecteur $n \wedge m$). Donc :

(23) $$a \rightarrow a' = mnanm$$

(24) $$nm = n.m + n \wedge m = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)\frac{n \wedge m}{|n \wedge m|} = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)B = \exp(B\varphi/2)$$

Dans l'expression ci-dessus B est le bivecteur unitaire qui caractérise le plan (n, m). On définit un rotor R en posant :

(25) $$R = \exp(-B\varphi/2) = mn \qquad \tilde{R} = \exp(B\varphi/2) = nm \qquad R\tilde{R} = 1 \qquad B^2 = -1$$

La définition de $\tilde{R}$ correspond à un renversement de l'ordre des vecteurs définissant R . Donc :

(26) $$a \rightarrow a' = Ra\tilde{R}$$

En comparant (26) et (18) on voit qu'au delà de 2-d ne subsiste qu'une des formules de rotation. On pourra vérifier que ceci est dû à la nécessité de ne pas modifier la composante de a perpendiculaire au plan défini par B. Il n'aura pas échappé au lecteur que la formule (26) est applicable quel que soit le nombre de dimensions de l'espace considéré. Il n'est plus question d'axe de rotation ; on opère par référence à un plan défini par le bivecteur B, avec un angle φ compté positivement dans le sens donné par B.

Un autre élément remarquable est que la formule de rotation d'un élément de rang quelconque de $\mathcal{G}_n$ est unique . Par exemple :

(27) $$ab \rightarrow Ra\tilde{R}Rb\tilde{R} = Rab\tilde{R}$$

Avec un calcul matriciel il faudrait définir une matrice spécifique pour chaque rang.

La composition des rotations devient également très simple. Si R_1 et R_2 sont les deux rotors le rotor résultant est :

(28) $$R = R_2 R_1 \qquad \tilde{R} = \tilde{R}_1 \tilde{R}_2$$

Quiconque a jamais essayé concrètement de construire des matrices de rotation et de manipuler des angles d'Euler saura apprécier la différence.

Il est utile de mentionner que R, somme d'un scalaire et d'un bivecteur, est un quaternion (unitaire), donc élément d'une sous-algèbre paire de la GA.

Nous pouvons immédiatement exploiter ces propriétés pour décrire le déplacement d'un corps solide dans l'espace par un rotor. Supposons qu'un repère orthonormal $\{\boldsymbol{h}_k\}$ attaché au corps tourne dans l'espace par rapport à un repère fixe $\{\boldsymbol{e}_k\}$ (pour plus de clarté nous notons maintenant les vecteurs d'espace en gras). On peut définir un rotor $R(t)$ dépendant du temps, pour décrire le mouvement de rotation du repère, et donc du corps solide, par :

(29) $\boldsymbol{h}_k = R(t)\boldsymbol{e}_k\tilde{R}(t)$

La vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est définie par :

(30) $\dot{\boldsymbol{h}_k} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}_k = -i(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{h}_k) = \frac{1}{2}i(\boldsymbol{w}\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{h}_k\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{h}_k.(i\boldsymbol{\omega})$

On définit ainsi le bivecteur vitesse angulaire :

(30 bis) $\Omega = i\boldsymbol{\omega}$

On voit combien cette notion est plus significative que son équivalent en géométrie vectorielle, puisque le bivecteur $\Omega\,dt$ représente le balayage effectué par le rayon vecteur pendant un temps dt sur le plan défini par le bivecteur.

Il reste à déterminer le rotor en fonction de $\Omega(t)$. En dérivant l'équation (29) et en tenant compte de la relation de normalisation du rotor on obtient l'équation différentielle :

(31) $\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R$ ou encore $\dot{\tilde{R}} = \frac{1}{2}\tilde{R}\Omega$

Le bivecteur Ω occupe une certaine "position" par rapport au repère attaché au corps mobile. Il peut être intéressant dans certains calculs d'introduire un bivecteur de référence Ω_B , "B" pour "body", occupant la "position" équivalente par rapport au repère fixe, c'est à dire déduit de Ω par la rotation inverse :

(32) $\Omega_B = \tilde{R}\Omega R$

4.Les équations de la mécanique classique.

Nous allons montrer[1] sans entrer dans le détail des calculs que le mouvement d'un corps solide peut être décrit en GA par des équations très simples indépendantes des coordonnées.

Le moment angulaire d'un point matériel de masse m, et le couple exercé par une force f vont être définis par :

(31) $L = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p}$ $N = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f}$

En dynamique ces éléments sont reliés par l'équation :

(32) $\dot{L} = \boldsymbol{v} \wedge (m\,\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{x} \wedge \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f} = N$

Deux définitions complémentaires nous seront nécessaires pour faire l'étude du déplacement du corps solide. D'une part le "commutateur" de deux bivecteurs, où le symbole opératoire ($\times$) n'a plus le sens de produit vectoriel usuel,

(33) $A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA)$

d'autre part la notion de tenseur d'inertie appliqué à un bivecteur, dont le résultat est un autre bivecteur :

(34) $A = \mathcal{I}(B) = \int d^3x\,\rho\,\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{x}.B)$

En effet $(d^3x\,\rho)$ est un volume multiplié par une densité, donc un scalaire, et $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{x}.B)$ est bien un bivecteur.

Le mouvement d'un point M_i du corps solide est caractérisé par l'équation :

(35) $\boldsymbol{y}_i(t) = R(t)\,\boldsymbol{x}_i\,\tilde{R}(t) + \boldsymbol{y}_G(t)$

1. Nous résumons dans ce § des éléments d'un cours de Cambridge disponible sur internet, exposés de manière plus détaillée dans un ouvrage récent[4].

où les vecteurs $\boldsymbol{y}$ représentent la position dans l'espace du corps en mouvement, $\boldsymbol{x}$ les vecteurs fixes correspondants du corps fixe de référence, $\boldsymbol{y}_G(t)$ la position dans l'espace du centre de gravité.

La vitesse de chaque point est donnée par :

(36) $$\boldsymbol{v}_i(t) = R(\boldsymbol{x}_i.\Omega_B)\tilde{R} + \boldsymbol{v}_G(t)$$

La quantité de mouvement globale du corps solide est donnée par :

(37) $$\int d^3x\, \rho\, \boldsymbol{v} = \int d^3x\, \rho[R(\boldsymbol{x}.\Omega_B)\tilde{R} + \boldsymbol{v}_G] = M\,\boldsymbol{v}_G$$

avec :

(37bis) $$\int d^3x\, \rho = M \qquad \int d^3x\, \rho\, \boldsymbol{x} = 0$$

Le moment angulaire du corps en mouvement est le bivecteur :

(38) $$L = R\mathcal{I}(\Omega_B)\tilde{R}$$

Si N est le couple des forces externes, on obtient :

(39) $$N = \dot{L} = R(t)[\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) - \Omega_B \times \mathcal{I}(\Omega_B)]\tilde{R}(t)$$

où l'expression entre crochets est un bivecteur.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le corps solide a un seul axe de symétrie et où le couple extérieur est nul (cas du gyroscope). On trouve alors que la composante ω_3 (axe de symétrie $\boldsymbol{e}_3$) de la vitesse angulaire de rotation ω est constante, de même que le moment angulaire L, et que l'équation (31) s'intègre sous la forme :

(40) $$R(t) = \exp(-\tfrac{1}{2}\Omega_l t)\exp(-\tfrac{1}{2}\Omega_r t)$$

où Ω_l et Ω_r s'expriment simplement en fonction de L, ω_3 , et des moments principaux d'inertie $I_1 = I_2$, I_3 , du solide :

(41) $$\Omega_l = \frac{1}{I_1}L \qquad \Omega_r = \omega_3\frac{I_1 - I_3}{I_1}i\boldsymbol{e}_3$$

Il y a donc une rotation "interne" dans le plan fixe ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$), qui explique la précession du gyroscope, composée avec une rotation dans le plan du moment angulaire constant.

Là encore les lecteurs ayant quelques souvenirs de leur cours de mécanique, apprécieront.

5.L'algèbre d'espace temps (STA).

Nous n'énoncerons que les éléments de base nécessaires pour donner ensuite un aperçu de la mécanique quantique relativiste. Mais il est clair que le sujet de la relativité traitée par la "space-time algebra (STA)" mériterait de longs développements. Nous partons du principe que les lecteurs possèdent quelques notions de base sur la relativité traitée avec les outils classiques.

Nous appelons (γ_0, γ_1, γ_2, γ_3) un repère orthonormé de base dans un espace de Minkowski pseudo-euclidien, où γ_0 est le vecteur temporel, c'est à dire le vecteur unitaire tangent à la ligne d'univers d'un éventuel observateur associé au dit repère. Nous utilisons un système d'unités naturel, tel que la vitesse de la lumière c soit égale à 1 . Alors :

(42) $$(\gamma_0)^2 = 1 \qquad (\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -1$$

Nous utiliserons les lettres latines pour indicer les γ_i d'espace de 1 à 3, et des lettres grecques pour indicer de 0 à 3 l'ensemble γ_μ des vecteurs de base. Il est utile aussi d'introduire le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$, partout nul sauf la diagonale de base, qui est (1,-1,-1,-1).

La STA comprend 16 termes de base :

1 scalaire, 4 vecteurs γ_μ , 6 bivecteurs $\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$, 4 trivecteurs $i\gamma_\mu$, 1 psodeudoscalaire i égal au produit $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ des vecteurs de base.

On voit facilement que i anticommute avec les vecteurs et les trivecteurs, et commute avec les bivecteurs. Les vecteurs de base satisfont aux relations générales :

(43) $$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\,\eta_{\mu\,\nu}$$

Ces relations sont formellement identiques à celles que satisfont les matrices de Dirac (théorie relativiste de l'électron).

On introduit parfois les vecteurs réciproques définis par :

(44) $$\gamma^\mu\eta_{\mu\nu} = \gamma_\nu$$

c'est à dire :

(44 bis) $$\gamma^0 = \gamma_0 \qquad \gamma^i = -\,\gamma_i$$

Il est utile d'introduire les bivecteurs :

(45) $$\boldsymbol{\sigma}_i = \gamma_i\gamma_0$$

avec lesquels nous pouvons construire une sous-algèbre paire de la STA. En effet on vérifie :

(46) $$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = i \qquad \boldsymbol{\sigma}_i\,.\,\boldsymbol{\sigma}_j = \delta_{i\,j} \qquad \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \boldsymbol{\sigma}_j = \varepsilon_{i\,j\,k}\, i\, \boldsymbol{\sigma}_k$$

Ces bivecteurs sont appelés "vecteurs relatifs" (relatifs à γ_0 donné). Ils définissent l'algèbre géométrique d'un espace 3-d, au repos, associé à γ_0 .

(Notons que les bivecteurs tels que $\gamma_i\gamma_j$, avec $i \neq j$, sont d'une autre nature ; leur carré est égal à -1).

Si l'on considère un évènement x dans l'espace-temps, on peut écrire :

(47) $$x = t\gamma_0 + x^i\gamma_i \qquad t = x.\gamma_0 \qquad x^i\gamma_i = x - (x.\gamma_0)\gamma_0 = (x \wedge \gamma_0)\gamma_0$$

Or $(x \wedge \gamma_0)\gamma_0$ représente la projection de x sur l'espace au repos associé à γ_0 . Cette projection, indépendante des γ_i , est un bivecteur de l'espace-temps que nous appelons vecteur relatif $\boldsymbol{x}$. Donc :

(48) $$x\gamma_0 = x.\gamma_0 + x \wedge \gamma_0 = t + \boldsymbol{x} = t + x^i\boldsymbol{\sigma}_i$$

(48 bis) $$(x\gamma_0)^{\sim} = \gamma_0\, x = t - \boldsymbol{x} = t - x^i\boldsymbol{\sigma}_i$$

L'invariant de distance s'écrit donc :

(49) $$x^{\,2} = x\gamma_0\gamma_0\, x = (t + \boldsymbol{x})(t - \boldsymbol{x}) = t^{\,2} - \boldsymbol{x}^{\,2}$$

L'expression (49) est évidemment indépendante de γ_0 , c'est à dire de l'observateur, résultat obtenu sans même évoquer la notion de transformation de Lorentz. En effet x , élément de GA, ne dépend par définition d'aucun repère. Dans la littérature anglo-saxonne on donne à l'opération définie par (48) le nom évocateur de "spacetime split". Elle permet de reformuler les équations invariantes avec les variables, temps et position dans l'espace, liées à un système inertiel donné.

Si nous cherchons par exemple la vitesse relative par rapport à l'observateur γ_0 d'une particule de ligne d'univers $x(\tau)$, τ étant son temps propre, on a :

(50) $$v = \partial_\tau x \qquad v^{\,2} = 1 \qquad \textit{(par définition du temps propre)}$$

(51) $$v\gamma_0 = v.\gamma_0 + v \wedge \gamma_0 = v_0(1 + \boldsymbol{v}) \qquad \textit{(en différentiant (48))}$$

(52) $$v_0 = v.\gamma_0 = \frac{dt}{d\tau} = (1 - \boldsymbol{v}^{\,2})^{-1/2}$$

(53) $$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \frac{v\wedge\gamma_0}{v.\gamma_0} = \frac{dx_i}{dt}\boldsymbol{\sigma}_i$$

Le même type de calcul mené sur le vecteur STA énergie-impulsion, donne la décomposition :

(54) $$p\gamma_0 = E + \boldsymbol{p}$$

avec :

(55) $$p^2 = (E+\boldsymbol{p})(E-\boldsymbol{p}) = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$$

Introduisons maintenant les transformations de Lorentz, sans entrer dans tous les détails. Les transformations qui nous intéressent peuvent être décomposées en une rotation de type spatial (pour un γ_0 donné), suivie d'une "rotation" de type temporel ("Lorentz boost"), par exemple dans le plan (γ_1, γ_0).

On aura donc :

(56) $$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R} \qquad R = LU \qquad \tilde{R} = \tilde{U}\tilde{L}$$

(57) $$U\gamma_0\tilde{U} = \gamma_0 \qquad \gamma_0' = L\gamma_0\tilde{L} = L^2\gamma_0 \qquad \gamma_1' = L\gamma_1\tilde{L} = L^2\gamma_1$$

La deuxième et la troisième relation (57) s'expliquent par le fait que γ_0 et γ_1 anticommutent avec le bivecteur $\gamma_1\gamma_0$ qui intervient dans le rotor L .

Bien entendu pour γ_2 et γ_3 qui commutent avec ce même bivecteur on aura :

(58) $$\gamma_2' = L\gamma_2\tilde{L} = L\tilde{L}\gamma_2 = \gamma_2 \qquad \gamma_3' = L\gamma_3\tilde{L} = L\tilde{L}\gamma_3 = \gamma_3$$

Nous passons donc d'un repère initial $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ à un repère (γ') où γ_0 et γ_0' sont respectivement représentatifs d'observateurs animés de mouvements inertiels différents.

Le fait que le bivecteur $\gamma_1\gamma_0$ soit de carré positif, contrairement aux bivecteurs caractérisant des rotations d'espace, permet d'écrire (géométrie hyperbolique) :

(59) $$L^2 = \gamma_0'\gamma_0 = \gamma_0'.\gamma_0 + \gamma_0'\wedge\gamma_0 = \mathrm{ch}\alpha + \gamma_1\gamma_0\,\mathrm{sh}\alpha = \exp(\gamma_1\gamma_0\,\alpha)$$

(60) $$L = \exp(\gamma_1\gamma_0\tfrac{\alpha}{2}) \quad = \mathrm{ch}\tfrac{\alpha}{2} + \gamma_1\gamma_0\,\mathrm{sh}\tfrac{\alpha}{2}$$

(60bis) $$\tilde{L} = \exp(-\gamma_1\gamma_0\tfrac{\alpha}{2}) = \mathrm{ch}\tfrac{\alpha}{2} - \gamma_1\gamma_0\,\mathrm{sh}\tfrac{\alpha}{2}$$

(61) $$L^2\tilde{L}^2 = 1 = (\gamma_0'.\gamma_0)^2 - (\gamma_0'\wedge\gamma_0)^2$$

Le même évènement x (vecteur indépendant de tout repère en GA), peut être décrit de deux façons différentes :

(62) $$x = t\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\gamma_3 = t'\gamma_0' + x'^1\gamma_1' + x'^2\gamma_2' + x'^3\gamma_3'$$

En remplaçant les γ' dans (62) par leurs expressions tirées de (59) et (60), on trouve sans difficulté les équations :

(63) $$t = t'\,\mathrm{ch}\alpha + x'^1\,\mathrm{sh}\alpha \qquad x^1 = t'\,\mathrm{sh}\alpha + x'^1\mathrm{ch}\alpha \qquad x^2 = x'^2 \qquad x^3 = x'^3$$

et leurs réciproques :

(64) $$t' = t\,\mathrm{ch}\alpha - x^1\,\mathrm{sh}\alpha \qquad x'^1 = -t\,\mathrm{sh}\alpha + x^1\mathrm{ch}\alpha \qquad x'^2 = x^2 \qquad x'^3 = x^3$$

Si nous remarquons que $(\gamma_0'\wedge\gamma_0)(\gamma_0'.\gamma_0)^{-1} = \boldsymbol{w} = w^1\boldsymbol{\sigma}_1$ n'est autre que le vecteur vitesse d'espace de l'observateur γ_0' apprécié par l'observateur γ_0 , il est facile d'établir les formules simples usuelles :

(65) $$t' = (1-\boldsymbol{w}^2)^{-1/2}(t - x^1w^1) \qquad x'^1 = (1-\boldsymbol{w}^2)^{-1/2}(x^1 - w^1\,t)$$

On conçoit aussi que l'on puisse ainsi établir des formules bien plus complexes, que l'on ne donne jamais dans les manuels.

Quand on voit l'aisance avec laquelle on peut reformuler la relativité restreinte avec la GA, on ne peut que rêver à ce qui se serait passé si Lorentz, Poincaré ou Einstein avaient extrait d'un tiroir poussiéreux de bibliothèque un mémoire de Clifford, vieux de vingt-cinq ans .... !

Avant d'aborder les sections suivantes il nous faut compléter nos outils par deux opérateurs différentiels. En géométrie spatiale, l'opérateur $\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^i}\boldsymbol{\sigma}_i = \partial_i\, \boldsymbol{\sigma}_i$ est bien connu ; il faut le généraliser en STA, par :

(66) $\nabla = \partial_\mu\, \gamma^\mu = \partial_0\, \gamma_0 - \partial_i\, \gamma_i$

auquel on peut appliquer le spacetime split :

(67) $\gamma_0\, \nabla = \partial_0 + \boldsymbol{\nabla}$ $\quad \nabla\, \gamma_0 = \partial_0 - \boldsymbol{\nabla}$ $\quad \gamma_0 \,.\, \nabla = \partial_0$ $\quad \gamma_0 \wedge \nabla = \boldsymbol{\nabla}$

Il est utile aussi de remarquer que l'opération d'inversion de l'ordre des vecteurs, notée $\tilde{M}$ en STA et par exemple $M^\dagger$ en géométrie spatiale associée, où M est un multivecteur quelconque, donne lieu à la relation :

(68) $M^\dagger = \gamma_0 \tilde{M} \gamma_0$ $\quad (= \gamma_0 M \gamma_0$ si M est pair)

6.Eléments d'électromagnétisme.

Nous nous limiterons à donner un aperçu de l'apport de la GA dans ce vaste domaine. Les équations de Maxwell peuvent s'écrire, en unités naturelles :

(69.0) $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \rho$ *(scalaire)*

(69.1) $\partial_t\, \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\, \boldsymbol{J} \quad \Longrightarrow \quad \partial_t\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}.(i\boldsymbol{B}) = -\, \boldsymbol{J}$ *(vecteur)*

(69.2) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \partial_t\, \boldsymbol{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} + \partial_t\, (i\boldsymbol{B}) = 0$ *(bivecteur)*

(69.3) $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \wedge (i\boldsymbol{B}) = 0$ *(pseudoscalaire)*

où $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}$ sont des bivecteurs STA, et des vecteurs d'espace ; $(i\boldsymbol{B})$ est aussi un bivecteur STA, mais un bivecteur d'espace (ceci correspond au caractère axial de $\boldsymbol{B}$ en formulation conventionnelle, qui se traduit en GA par le fait que $i\boldsymbol{B}$ ne comprend que des termes de type $\gamma_i \gamma_j$). L'opérateur différentiel $\boldsymbol{\nabla}$ est aussi un vecteur d'espace et un bivecteur STA.

On remarque que l'on peut regrouper la densité de charge ρ et le courant de charge $\boldsymbol{J}$ en un seul courant de charge d'espace-temps J, par :

(70) $\gamma_0\, J = \gamma_0\,.J + \gamma_0 \wedge J = \rho - \boldsymbol{J}$

Les quatre équations (69) se regroupent alors en une seule :

(71) $(\partial_t + \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}) = \rho - \boldsymbol{J} \quad \Longrightarrow \quad \nabla F = J$

On peut noter que $F = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}$ est un bivecteur de STA et la somme d'un vecteur et d'un bivecteur dans l'espace obtenu par spacetime split γ_0 . La dépendance de γ_0 de la séparation entre vecteur électrique et vecteur (axial) magnétique est mise en évidence par les formules suivantes :

(72) $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(F - F^\dagger) = \frac{1}{2}(F - \gamma_0 F \gamma_0)$ $\quad i\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(F + F^\dagger) = \frac{1}{2}(F + \gamma_0 F \gamma_0)$

L'équation (71) est intéressante non seulement par son étonnante simplicité, mais surtout parce que grâce aux propriétés du produit géométrique elle peut être inversée sous la forme d'une fonction de Green (opérateur intégral) :

(73) $\nabla F = J \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla^{-1}\, J$

D'autre part, en introduisant un potentiel vecteur A auquel nous imposons la condition de Lorentz $\nabla.A=0$ nous obtenons l'équation d'onde de l'électromagnétisme :

(74) $$F=\nabla\wedge A=\nabla A \quad\Longrightarrow\quad \nabla F=\nabla^2 A=J$$

Soulignons que l'invariance des équations de Maxwell est acquise par définition dès que l'on a pu écrire, en quatre lignes, la transcription en GA des équations (69) et le regroupement en une équation unique (71) indépendante des coordonnées. Par les méthodes tensorielles il faut plusieurs pages de calcul pour aboutir au même résultat sous la forme plutôt hermétique :

(75) $$\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}=0$$

Il est intéressant de citer la formule de transformation qui permet, par exemple, de donner la valeur d'un champ électrique vu par un observateur γ_0' en mouvement par rapport à γ_0 . Soit le rotor L défini par :

(76) $$\gamma_0'=L^2\gamma_0$$

Les propriétés de base des transformations linéaires représentées par ce type de rotors permettent d'écrire :

(77) $$E_i'=F_i'=(\gamma_i'\gamma_0').F=(L\boldsymbol{\sigma}_i\tilde{L}).F=(\tilde{L}L\boldsymbol{\sigma}_i\tilde{L}L).(\tilde{L}FL)=\boldsymbol{\sigma}_i.(\tilde{L}FL)$$

La transformation inverse de celle faite par le rotor sur les vecteurs de base, appliquée à F, soit $(\tilde{L}FL)$ permet donc de mettre directement en évidence, dans le repère γ_0 , les composantes de F vues dans son repère par l'observateur mobile γ_0' .

Notons aussi la définition des invariants classiques :

(78) $$\tfrac{1}{2}FF^\dagger=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}+i\,\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}-i\,\boldsymbol{B})=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

(79) $$F^2=\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2+2i(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

Enfin si l'on considère une particule de charge q , de vitesse STA $v=\gamma_0'$, dans un champ électromagnétique F , celle-ci est soumise à une force de Lorentz qui s'exprime dans le repère γ_0 par :

(80) $$\dot{\boldsymbol{p}}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

On démontre facilement les relations :

(81) $$m\,\dot{v}=qF.v \qquad \dot{v}v=\frac{q}{m}\boldsymbol{E}'$$

donnant respectivement la forme relativiste, donc invariante, de la force de Lorentz, et le bivecteur accélération qui montre que la particule chargée n'est sensible dans son repère propre qu'au champ électrique.

7.La mécanique quantique.

Pour cette section, qui est la plus difficile, j'adopterai un style plus personnel (en italique) pour distinguer mes propres commentaires des éléments objectifs - disons scientifiquement vérifiables - tirés de mes lectures. Pour ces derniers je m'efforcerai de rester très proche des textes originaux consultés tout en les résumant, ce qui n'est pas une tâche facile.

En observation préliminaire je rappellerai que la mécanique quantique soulève bien des difficultés d'interprétation. En me limitant à l'exemple un peu caricatural mais spectaculaire du "chat de Schrödinger" je dirai qu'une théorie qui suppose qu'avant l'ouverture par un observateur humain de la boîte où ce malheureux félin séjourne en compagnie d'une fiole de cyanure hypothétiquement brisée par un marteau, ce chat serait dans un état de superposition, chat-mort, chat-vivant, je dirai donc qu'une telle théorie ne peut pas être pleinement satisfaisante. Que se passerait-il par exemple si un chimpanzé ouvrait la boîte ?

Ces questions sont étudiées aujourd'hui dans le cadre des théories de la décohérence, qui apportent une réponse à mon sens satisfaisante, mais où toutes les difficultés mathématiques ne semblent pas encore résolues. Je renvoie pour ce passionnant sujet à Murray Gell-Mann[5] *et à un livre récent d'un physicien français, Roland Omnès*[6].

Je rappellerai aussi qu'une interprétation concurrente de celle de Copenhague, dans la lignée des idées de jeunesse de Louis de Broglie (l'onde pilote) a été développée avec succès par le physicien américain David Bohm, qui a complété l'équation de Schrödinger par une équation dite de potentiel quantique. Dans cette formulation les expériences de diffraction deviennent compatibles avec la notion de trajectoire, rejetée par les orthodoxes. Les résultats ainsi obtenus ne diffèrent pas de ceux de la mécanique quantique standard, mais leur interprétation est causale, ce qui résoud la plupart des paradoxes de Copenhague.

Dans ce contexte, qui reste curieusement passionnel, que peut apporter l'algèbre géométrique ?

Dans un texte de synthèse relativement récent David Hestenes[7] donnait ses conclusions les plus frappantes concernant la mécanique quantique non-relativiste, c'est à dire les équations de Schrödinger (en principe sans spin) et de Pauli (avec spin) :

- l'imaginaire unité, $i' = \sqrt{-1}$, qui apparaît dans les fonctions d'onde de fermions (électrons, etc...), est représentatif (après transposition en GA) d'un bivecteur spécifiant la direction du spin ;

- en GA le bivecteur $i\sigma_3\hbar$ est représentatif du spin, même dans l'équation de Schrödinger ; le spin n'est donc pas un simple ajout, mais constitue un élément essentiel de la théorie, que ce soit pour les fermions ou les bosons ;

- les matrices de Pauli doivent être considérées comme des vecteurs et non comme des "opérateurs" matriciels de spin ;

- les observables bilinéaires représentent la cinématique des rotations aussi naturellement en théorie classique qu'en théorie quantique ;

- la fonction d'onde (réelle) en GA est plus facile à interpréter et à calculer que celle de la version standard (complexe).

Il convient ici de rappeler que l'équation initiale de Schrödinger permettait de quantifier les niveaux d'énergie d'un atome en fonction d'opérateurs (positions, quantités de mouvement, moments cinétiques) qui avaient tous un analogue en physique classique. A la suite notamment de l'expérience de Stern et Gerlach où l'on soumettait un jet d'atomes à un champ magnétique variable dans l'espace, on s'est rendu compte qu'il fallait introduire un opérateur quantique supplémentaire, le spin. Celui-ci permettait d'expliquer les multiplets de niveaux d'énergie observés en laboratoire. Sur le plan théorique la situation n'est cependant pas très satisfaisante : en effet d'après les relations de commutation ces opérateurs spin sont de même nature que les moments cinétiques des particules, alors que tous les efforts faits pour découvrir un analogue classique au spin ont échoué. La GA va complètement bouleverser ce paysage.

L'équation de Pauli, introduite d'abord de manière pragmatique par Pauli, et justifiée ultérieurement par Dirac dans le cadre d'une théorie plus vaste, ce qui a fait penser à tort que le spin était un phénomène spécifiquement relativiste, s'écrit :

(82) $$i'\hbar\partial_t\Psi = \underline{H}_S\Psi - \frac{e\hbar}{2mc}\sigma.B\Psi$$

Dans cette équation σ représente un "vecteur de matrices", dont les composantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les matrices de Pauli :

$$(83) \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ est un vecteur de champ magnétique, et l'on pose :

$$(84) \qquad \sigma.B = b_i\,\sigma_i$$

A ce stade il est nécessaire de signaler que l'on rencontre dans tous les manuels une identité matricielle remarquable *(et barbare)* :

$$(85) \qquad \sigma.a\ \sigma.b = a.bI + i'\sigma.(a \times b)$$

qui prouve tout simplement que les physiciens pratiquent l'algèbre de Clifford sans le savoir, ou en tout cas d'une manière inutilement compliquée !

Sans faire de calculs, il est presque évident que l'on peut établir une bijection entre les spineurs de la théorie de Pauli, c'est à dire une fonction d'onde composée de deux nombres complexes Ψ_+ (spin up) et Ψ_- (spin down), et les multivecteurs pairs de $\mathcal{G}_3$ que nous désignerons par ψ . Dans les deux cas ces objets mathématiques dépendent linéairement de quatre paramètres libres.

On obtient ainsi en GA une équation entièrement composée d'éléments de $\mathcal{G}_3$, sans distinction entre opérateurs et fonctions d'onde :

$$(86) \qquad \partial_t\,\psi i\sigma_3\hbar = \underline{H}_S\,\psi - \frac{e\hbar}{2mc}\,B\psi\sigma_3$$

où i est le peudoscalaire et $i\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ un bivecteur.

Cette équation de Pauli transposée donne l'équation de Schrödinger en GA si l'on supprime le dernier terme.

Il est facile de montrer que le choix d'une direction σ_3 n'introduit pas d'élément arbitraire dans les analyses, l'équation (86) étant invariante (covariante au sens tensoriel) par une rotation.

En admettant l'interprétation probabiliste de Born, $\psi\psi^\dagger = \rho$, on peut écrire la fonction d'onde sous la forme :

$$(87) \qquad \psi = \rho^{1/2}U \qquad\qquad UU^\dagger = 1$$

et déterminer un "repère d'observables locales" défini par :

$$(88) \qquad \psi\sigma_k\,\psi = \rho e_k \qquad\qquad e_k = U\sigma_k U^\dagger$$

Ce repère, qui dépend du temps, est attaché à chaque position x de la particule étudiée.

On définit ensuite un spin sous forme vectorielle et bivectorielle :

$$(89) \qquad s = \tfrac{1}{2}\hbar e_3 = \tfrac{1}{2}\hbar U\sigma_3 U^\dagger \qquad\qquad S = i s = \tfrac{1}{2}\hbar U i\sigma_3 U^\dagger = \tfrac{1}{2}\hbar e_1 e_2$$

On peut alors montrer que le facteur $\frac{1}{2}i'\hbar$ dans l'équation (82) est (en théorie matricielle) la représentation du bivecteur de spin par sa valeur propre. Donc le spin a été introduit dans l'équation initiale de Schrödinger par le facteur $i'\hbar$. Cette théorie décrit non pas des électrons sans spin, mais des particules à spin constant (dans un état propre).

Le terme additionnel de l'équation de Pauli peut s'écrire :

$$(90) \qquad -\frac{e}{mc}Bs\psi = -\frac{e}{mc}(B.s + B \wedge s)\psi$$

qui représente la somme d'une énergie magnétique et d'un couple magnétique. Dans un état stationnaire où le couple est nul, le spin ne peut être que parallèle ou antiparallèle à B . Alors :

$$(91) \qquad B.\boldsymbol{s} = \pm\,1/2\,\hbar|B|$$

et l'on retrouve les deux valeurs usuellement attribuées au spin. Mais la nature vectorielle du spin réapparaît si B est variable.

On peut montrer aussi que l'énergie de la particule peut être mise sous la forme :

(92) $\qquad E = \omega . s \qquad$ avec $\qquad \partial_t s = \omega \times s \qquad \partial_t U = -\frac{1}{2} i \omega U$

On constate d'une part un mouvement de précession du spin avec la vitesse angulaire ω, d'autre part que les expressions de la rotation du repère propre et de l'énergie sont de la même forme que pour une particule classique. Tout ceci pose bien sûr des problèmes d'interprétation sur lesquels nous reviendrons.

Déjà à ce stade la souplesse et la facilité apportées par la GA dans les calculs de mécanique quantique sont impressionnantes. Ayant été amené lors de la rédaction du présent article à "réviser" mes connaissances en matière de moments cinétiques et spin quantiques, je peux dire que le volume de travail, l'effort de mémoire et l'effort d'abstraction sont, sur ce sujet, de l'ordre de un à dix entre les deux approches. De manière plus convaincante David Hestenes[8] cite une étude théorique où il a pu ramener de cent à dix pages un travail fondamental de Takabayasi, que celui-ci avait réalisé quinze ans plus tôt par les méthodes tensorielles usuelles, au prix d'un véritable tour de force mathématique.

Il nous reste à aborder avec modestie ce monument de la science qu'est l'équation de Dirac. Nous disposons heureusement de deux documents récents de Hestenes[8][9], dont l'un publié entre autres par la Fondation Louis de Broglie *(ce qui laisse supposer qu'il y a tout de même quelques personnes qui s'intéressent à la GA en France).*

Dans cette théorie, qui, *peut-être en raison de sa difficulté*, est peu citée dans les débats d'interprétation, réside sans doute la clé des mystères de la mécanique quantique. Aux conclusions déjà résumées pour les équations non relativistes s'ajoute notamment l'idée que le spin de l'électron et la phase de la fonction d'onde, que nous allons définir, constituent des propriétés inséparables de la cinématique de l'électron, dans le cadre de ce que l'on appelle la "zitterbewegung" *(littéralement "mouvement tremblotant").* L'interprétation qui en découle suggère fortement l'idée que les phénomènes quantiques ont une structure cachée, qui n'a été prise en compte par aucune des théories élaborées à ce jour. *C'est ici sans doute que le bât blesse et que les travaux de Hestenes provoquent de regrettables phénomènes de rejet.*

Nous n'écrirons pas le détail des matrices de Dirac, qui sont des matrices complexes (4,4) construites à partir des matrices de Pauli, et qui satisfont en calcul matriciel aux relations de définition que nous avons exposées pour la STA. Par une méthode à peine plus compliquée que celle déjà exposée on établit à partir de la version matricielle de l'équation de Dirac :

(93) $\qquad (i' \hbar \partial - e A) \Psi = m \Psi$

sa version en GA :

(93 bis) $\qquad \partial \psi \gamma_2 \gamma_1 \hbar - e A \psi = m \psi \gamma_0$

où $\quad \partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ est la dérivée vectorielle, $A = A^\mu \gamma_\mu$ le potentiel vecteur, et la fonction d'onde ψ un multivecteur pair.

On peut facilement prouver la covariance de cette équation. L'apparition de $\gamma_2 \gamma_1 = i \sigma_3$, entité géométrique, entraîne la disparition des nombres complexes.

La fonction d'onde ψ étant un multivecteur pair, on peut écrire :

(94) $\qquad \psi \tilde{\psi} = \rho e^{i\beta} = \rho(\cos \beta + i \sin \beta) \qquad \psi = (\rho e^{i\beta})^{1/2} R \qquad R \tilde{R} = \tilde{R} R = 1$

qui outre la densité de probabilité ρ fait apparaître un facteur de phase β, appelant une interprétation. Comme pour l'équation de Pauli le rotor permet de définir la cinématique d'un repère mobile associé à la particule. Si $v = e_0$ est la vitesse (STA) le long des lignes de courant *(peut-on appeler cela vitesse de la particule, c'est à dire affirmer qu'une ligne de courant traduit effectivement la trajectoire d'une particule ? ...)*, le rotor est défini par :

(95) $\qquad v = R \gamma_0 \tilde{R} \qquad$ et $\qquad e_i = R \gamma_i \tilde{R}$

Le courant de probabilité de Dirac est obtenu par :

(96) $\psi\gamma_0\tilde{\psi} = \rho v$

et l'on définit le spin sous ses formes vectorielles et bivectorielles par :

(97) $s = \frac{1}{2}\hbar e_3 \qquad S = \frac{1}{2}\hbar e_2 e_1 = \frac{1}{2}\hbar R\gamma_2\gamma_1\tilde{R} = \frac{1}{2}\hbar i e_3 e_0 = isv$

La vitesse et le spin déterminent cinq des six paramètres dont dépend le rotor ; il reste à déterminer l'orientation des vecteurs e_1, e_2 dans leur plan, c'est à dire la phase de la fonction d'onde dans le plan S. Les deux autres paramètres intervenant dans la fonction d'onde sont ϱ et β qui ont un caractère statistique. Le premier est de toute évidence une densité de probabilité ; des hypothèses intéressantes ont été formulées pour le second, sans que l'on puisse définitivement conclure.

Un des apports essentiels de la STA en mécanique quantique, outre à nouveau la simplicité des formulations et démonstrations, est qu'elle montre que l'apparition "spontanée" du spin n'est pas une conséquence *magique* de l'existence des matrices γ ; la liaison entre le bivecteur $\gamma_1\gamma_2$ et le spin montre que celui-ci a été introduit dans l'équation de Dirac par l'association de l'imaginaire unité i' avec l'opérateur différentiel. *Ce n'est semble-t-il que par l'accident historique de la justification théorique de l'équation de Dirac avant celle de Pauli que le spin a été associé à la relativité.*

On peut préciser cela en multipliant S à droite par ψ , ce qui donne tous calculs faits :

(98) $S\psi = \frac{1}{2}\hbar\psi\gamma_2\gamma_1$

Retranscrit en formalisme matriciel ceci veut dire que $\frac{1}{2}i'\hbar$ est la valeur propre de l'opérateur de spin. Elle est imaginaire parce que le tenseur de spin $S^{\alpha\beta}$ est antisymétrique.

Le formalisme standard fait en revanche complètement disparaître le fait que $S = S(x)$ définit en chaque point x un plan de spin de type espace, orthogonal aux lignes de courant.

Une analyse approfondie permet de calculer la densité de moment angulaire :

(99) $J(v) = \rho(p \wedge x + S)$

où $p \wedge x$ est le moment angulaire orbital. Cette formule justifie l'interprétation de S comme bivecteur spin.

Revenons cependant sur les problèmes d'interprétation à travers la notion (discutée) de trajectoires de particules. En effet comme l'approche de Bohm l'approche STA permet de calculer des "trajectoires", c'est à dire des lignes de courant solutions de l'équation de Dirac, que l'on peut interpréter chacune comme "l'histoire" de l'électron qui par hypothèse se serait trouvé à l'instant t_0 au point $\boldsymbol{x}_0$. Puisque la théorie STA est strictement isomorphe à la théorie matricielle standard et conduit donc aux mêmes résultats - sous réserve d'expériences d'un nouveau type - , ce n'est pas le calcul mathématique des lignes de courant qui est ici en cause, mais la signification physique qu'il faut leur donner.

Par des calculs que nous ne pouvons pas exposer ici, on arrive à définir autour de chaque ligne de courant de Dirac, servant d'axe, une famille à trois paramètres de trajectoires hélicoïdales dont le rayon est égal à la longueur d'onde Compton de l'électron et la fréquence de rotation autour de l'axe égale au double de la fréquence de l'onde pilote proposée par Louis de Broglie. L'électron peut être sur l'une quelconque de ces hélices, avec une répartition uniforme de probabilité. Ce sont ces mouvements que l'on qualifie aujourd'hui de "zitterbewegung" ZBW, notion déjà connue de Schrödinger sous une forme moins élaborée évidemment.

La vitesse spatiale de l'électron sur ces trajectoires "probables" est égale à la vitesse de la lumière. La phase de la fonction d'onde est alors la phase circulaire de la ZBW. La vitesse observée de l'électron est égale à la valeur moyenne vectorielle des vitesses hélicoïdales sur une période ZBW (qui est de l'ordre de 10^{-21} secondes).

A partir de là de nombreuses possibilités d'interprétation se présentent, qu'il s'agisse des relations d'incertitude, du principe d'exclusion de Pauli, de l'explication de la diffraction, et de bien d'autres choses encore.

Je ne prends évidemment pas parti sur ces interprétations, mais j'incite vivement le lecteur intéressé à consulter les textes originaux sur internet. Je note simplement que la STA conduit à des conclusions de même nature que le potentiel quantique de Bohm et permet donc aussi d'apporter des réponses aux contradictions logiques de la théorie quantique standard. Est-ce la raison pour laquelle les physiciens français semblent s'en désintéresser ...?

Les équipes de Cambridge ont développé de passionnantes études théoriques sur la diffraction et les effets tunnels, étudiés en STA. Pour la classique expérience de la double fente on aboutit à des conclusions identiques aux calculs "bohmiens", à savoir que l'on trouve les effets d'interférence tout en définissant des "trajectoires d'électrons" qui ne se recoupent pas, et que l'on peut donc rattacher à l'une ou à l'autre fente.

Prudemment les auteurs se contentent de parler de lignes de courant. Il y a même un merveilleux passage ou, pour justifier le dessin tracé par l'ordinateur, il est dit : "Souvenez-vous que nos ordinateurs ne savent rien de nos arguments théoriques concernant une possible identification de l'opérateur imaginaire de Dirac avec le bivecteur générant les rotations autour de l'axe de spin". La peur de la hache brandie par le spectre de Bohr....

Le calcul des effets tunnels est encore plus spectaculaire. Par la STA on calcule sans difficulté les lignes de courant des particules transmises et celles des particules réfléchies, ainsi que l'histogramme du temps passé par les particules dans la barrière de potentiel, en tenant compte en outre des effets de spin. Ces calculs sont théoriquement impossibles ou très difficiles en mécanique quantique standard ou même "bohmienne". On explique en particulier le paradoxe des vitesses superluminales que l'on a cru constater pour ces traversées.

Pour ma part, quelles que soient les querelles d'interprétation, je me rallie sans hésiter à l'idée que la GA est le meilleur outil mathématique disponible pour étudier l'équation de Dirac.

8.Autres domaines et conclusion.

Nous sommes loin d'avoir épuisé le sujet. Dans le prolongement des réflexions théoriques que nous venons de développer longuement, il y a des sujets du même type en astronomie pour l'étude des trous noirs, l'étude de la gravité dans le cadre des théories de jauge, les analyses d'astronomie de position et de dynamique stellaire. Elles nécessitent évidemment d'entrer plus en détail dans un sujet que nous avons à peine effleuré, l'analyse mathématique (GC).

Dans un domaine plus terre à terre si l'on peut dire, la GA est utilisée depuis de nombreuses années, sous la forme de quaternions pour le calcul de trajectoires de fusées et de satellites. La NASA estimerait à 20% le gain de temps de calcul par rapport aux méthodes matricielles. Il semblerait même que dans l'ex-Union Soviétique on ait utilisé et enseigné les quaternions aux militaires chargés des missiles et aux astronautes dès les années 50, sous secret militaire !

On reproche parfois à la GA d'être une théorie exclusivement métrique. En fait il n'en est rien : on peut très bien l'utiliser en géométrie projective, soit pour démontrer algébriquement de vieux théorèmes tombés en désuétude, soit de manière plus utile pour construire des applications de "vision par ordinateur".

De même la robotique constitue de toute évidence un champ d'application fructueux et sans doute déjà largement exploité.

En conclusion, j'espère avoir réussi à donner une vue d'ensemble sur un outil mathématique passionnant et avoir apporté une petite pierre sur le chemin austère tracé par David Hestenes et les quelques chercheurs qui ont bien voulu le suivre. J'espère surtout que les chercheurs français ne restent pas à l'écart de ce mouvement d'idées.

Je laisse volontiers le mot de la fin à G.Casanova qui, dans son livre de 1976, disait: "l'enseignement français a peu de goût actuellement pour les représentations trop concrètes, jugées peu adéquates, et l'on doit certes chercher l'origine de cette orientation dans l'envahissement de la physique moderne par les espaces abstraits......, mais on peut aussi se référer à une très ancienne tradition cartésienne d'analyse qui fragmente la réalité pour la mieux appréhender , qui dissèque l'objet pour chercher la raison ultime des lois dans le détail des parties au détriment d'une étude plus synthétique ou moins disjonctive...".

Il me semble que sa voix n'a été guère entendue.

G.Ringeisen

novembre 2004

Bibliographie sommaire

1. G.Casanova, *L'algèbre vectorielle*, Que sais-je, P.U.F.
2. W.Pezzaglia (par recherche internet)
3. Leo Dorst (par liens chez Hestenes)
4. Chris Doran - Anthony Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge
5. Murray Gell-Mann, *Le Quark et le Jaguar*, Champs, Flammarion
6. Roland Omnès, *Understanding Quantum Mechanics*, Princeton University Press
7. David Hestenes, *Oersted Medal Lecture 2002*
8. David Hestenes, *Mysteries and Insights of Dirac Theory*
9. David Hestenes, *Spacetime Physics with Geometric Algebra*

Les documents de Hestenes et de Cambridge sont accessibles par (http://modelingnts.la.asu.edu) et par (http://www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/) ou recherche directe internet.