La théorie des groupes : méthodes standard ou algèbre géométrique.

La présente note complète sur un plan plus technique les réflexions figurant dans ≪ Quaternions , rotors, spineurs ≫ . L'idée m'en est venue en découvrant sur internet un texte passionnant sur la théorie des groupes rédigé il y a une dizaine d'années par un chercheur de Paris 7 , B.Delamotte [1]. A vrai dire avant d'avoir acquis une certaine maîtrise de l'algèbre géométrique hestenienne je n'aurais jamais eu le courage d'aborder un sujet aussi aride. Cependant lors d'une première lecture rapide de ce document je me suis rendu compte qu'il était non seulement très bien rédigé – pour autant que sois apte à en juger – , mais que la théorie des groupes en relation avec à la fois la physique classique et la physique quantique y était abordée d'une manière originale. En effet dans les cours de mécanique quantique la question des groupes en liaison avec les symétries est en général abordée assez tard, et parfois sans mettre suffisamment en relief la relation avec la mécanique classique. Dans [1] l'auteur procède de manière inverse en intégrant en quelque sorte les deux domaines dans une commune théorie des groupes. Cela est non seulement efficace sur le plan pédagogique, mais très intéressant sur le plan conceptuel. Je retiens par exemple l'expression très générale que l'auteur en tire pour le *principe de correspondance* en indiquant que la relation de transformation d'un objet classique, disons par une rotation, s'applique aux valeurs moyennes pour un objet quantique (p.54). Ainsi la relation tensorielle ou spinorielle

(IV-10) $$T'_\alpha = [M(\theta)]_\alpha^{\ \beta} T_\beta$$

devient

(IV-11) $$(<\psi \upharpoonleft T_\alpha \upharpoonright \psi>)' = [M(\theta)]_\alpha^{\ \beta} <\psi \upharpoonleft T_\beta \upharpoonright \psi>$$

Bien entendu il ne s'agit pas ici de paraphraser – au risque de le caricaturer – le texte de B.Delamotte, mais de faire apparaître, du moins pour la partie classique, la correspondance des principaux éléments avec ceux que l'on peut établir en algèbre géométrique (GA). Je serai relativement bref pour la partie quantique pour des raisons que l'on comprendra ultérieurement. Je me référerai aussi à un intéressant texte d'un enseignant de Virginia Tech [2]. Pour la bonne compréhension de tout ceci il est vivement recommandé de lire au moins [1] jusqu'à la page 47, ou mieux 67.

Dans [1] l'auteur après avoir développé les notions générales de *symétrie* et de *représentations* d'un groupe aborde dans le chapitre 2 la question du groupe des rotations et de ses représentations, les groupes SO(3) et SU(2). Il montre comment à partir de la notion générale de matrice de rotation R , dans $\mathbb{R}^3$, satisfaisant à :

(1) $$R^t = R^{-1}$$

on est amené à définir les *générateurs infinitésimaux de rotation* sous la forme de *matrices hermitiques* J_i telles que dans une rotation $\delta\theta$ des vecteurs de base autour de l'axe z par exemple les composantes v_i d'un vecteur quelconque varient de[1] :

(2) $$\delta v_i = i\,\delta\theta\,(J_z)_{ij} v_j \qquad (J_i)_{jk} = -i\,\varepsilon_{ijk}$$

On montre alors facilement que l'on peut écrire, formellement, la relation matricielle suivante :

(3) $$R(\theta, z) = e^{i\theta J_z} = 1 + i\theta J_z + \frac{(i\theta)^2}{2} J_z^{\ 2} + \ldots \ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui permet donc d'écrire la matrice de rotation d'angle θ autour d'un axe Oz sous la forme d'une série de matrices. On généralise cela à une rotation d'angle θ autour d'un axe quelconque de vecteur unitaire n par la formule[2] :

(4) $$R(\theta, n) = e^{i\theta n.J} = e^{i\theta n_i J_i}$$

1. Sauf exception signalée j'utilise la convention de sommation d'Einstein quelle que soit la position des indices. Le symbole i hors indices est l'imaginaire unité, ou bien en GA le pseudoscalaire de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour éviter tout risque de fausse interprétation, je préfère la notation θn à celle, $\vec{\theta}$, utilisée dans [1] .

où J a la signification d'un *vecteur de matrices*. Dans [1] l'auteur ne donne pas de démonstration de (4). On en trouvera une dans [2] , inutilement sophistiquée. Il me semble qu'une démonstration extrêmement simple consiste à remarquer, qu'après développement de (4), on est en présence d'une matrice dont chaque terme s'exprime tensoriellement en fonction d'une somme de puissances de $\theta n^i \varepsilon_{ijk}$, expression qui, dans un changement de base orthonormée où l'on prendra un nouvel axe Oz' confondu avec n, donnera $\theta \varepsilon_{3'j'k'}$ et donc une matrice du type (3), ce qui suffit pour justifier (4).

Dans [1] , après avoir introduit les relations de commutation entre les matrices J_i et la notion d'algèbre de Lie, l'auteur justifie, bien que cela ne soit pas strictement nécessaire, par un raisonnement très général et savant l'existence de $\theta'' n''$ dans le produit des matrices de rotation :

(5) $$e^{i\theta n.J} e^{i\theta' n'.J} = e^{i\theta'' n''.J}$$

L'intérêt de cette démarche est la mise en évidence du fait que l'algèbre de Lie du groupe des rotations contient toute l'information nécessaire sur sa table de multiplication. Le groupe est représenté par les matrices ainsi définies qui agissent sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette représentation tridimensionnelle est dénommée SO(3).

A ce stade nous pouvons faire une première observation sur l'apport de l'algèbre géométrique. La rotation d'un vecteur v d'un angle θ autour d'un axe n est opérée par des rotors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$ tels que :

(6) $$v' = \mathcal{R} v \mathcal{R}^{-1} \qquad \mathcal{R} = e^{in\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + in\sin\frac{\theta}{2}$$

où i est le pseudoscalaire dans la GA de $\mathbb{R}^3$. Ainsi la rotation d'un angle fini est obtenue sans passer par l'intermédiaire compliqué d'un générateur infinitésimal.

De même le produit de deux rotations se calcule immédiatement à partir du produit $\mathcal{R}\mathcal{R}'$ qui donne sous une forme simple les éléments θ'', n".

L'auteur établit ensuite dans [1] les relations de commutation[3] des matrices de Pauli, ainsi dénommées en raison de leur origine historique et, à tort, souvent liées exclusivement à la mécanique quantique. On a :

(I-23) $$[\hat{\sigma}_x/2, \hat{\sigma}_y/2] = i\,\hat{\sigma}_z/2 \qquad \text{etc ....}$$

Ce sont des matrices (2,2) complexes. Complétées par la matrice unité elles constituent la base d'un espace matriciel permettant de définir une représentation[4] bidimensionnelle du groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$. Ces matrices s'écrivent :

(7) $$U(\theta, n) = e^{i\theta n.\hat{\sigma}/2} = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2} n.\hat{\sigma} \qquad n.\hat{\sigma} = n^i\,\hat{\sigma}_i$$

Elles ont la forme générale, unitaire :

(I-26) $$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \det U = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$$

Elles agissent sur des vecteurs complexes bidimensionnels, qui se transforment lors d'une rotation, définie en $\mathbb{R}^3$ par θ et n , selon :

(I-27) $$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = U(\theta, n)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs, que l'on dénomme spineurs, engendrent la représentation dite SU(2) du groupe des rotations.

3. Relations de type quantique [a,b]=ab-ba . Pour éviter tout risque de confusion avec la GA j'utilise la notation $\hat{\sigma}$ au lieu de σ .

4. Ce sont les propriétés générales des algèbres de Lie qui justifient cette affirmation (voir [1]).

Il existe évidemment un homomorphisme envoyant SU(2) sur SO(3). Dans [1] l'auteur explicite cette relation en définissant d'abord des matrices (2,2) $M \in \mathcal{M}$, complexes, hermitiques, de trace nulle. $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ et l'on peut écrire :

(I-29) $\qquad M = x^i \hat{\sigma}_i$

(8) $\qquad x^i = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(M\hat{\sigma}_i) \qquad \det M = -\,(x^i x^j \delta_{ij})$

On établit que lors d'une rotation active de matrice R dans $\mathbb{R}^3$:

(9) $\qquad x \;\Rightarrow\; x' = Rx \qquad M \;\Rightarrow M' = UMU^{-1} \qquad U \in \mathrm{SU}(2) \quad M' \in \mathcal{M}$

(10) $\qquad R_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_i U \hat{\sigma}_j U^{-1})$

(11) $\qquad U(\theta, \hat{z}) = e^{i\theta\hat{\sigma}_z/2} \qquad \Rightarrow \qquad R = e^{i\theta J_z}$

SO(3) est donc une représentation de SU(2) mais l'inverse n'est pas exact car l'application de SO(3) dans SU(2) est bivaluée (U et -U sont associés à la même matrice R).

En page 36 l'auteur de [1] démontre les relations utiles, respectivement pour les σ_i et les J_i :

(II-41) $\qquad U^{-1}\hat{\sigma}_i U = R_{ij}\,\hat{\sigma}_j$

(II-42) $\qquad R^{-1} J_i R = R_{ij}\, J_j$

Dans [2] on note que dans les membres de gauche de ces deux relations, un peu déroutantes à première vue, on transforme les σ ou les J comme des matrices alors que dans les membres de droite on les traite comme s'il s'agissait de composantes vectorielles *(les vecteurs de matrices ...).*

B.Delamotte ne cite pas, parce qu'elle ne joue aucun rôle dans son exposé, une relation entre matrices de SU(2) qui figure dans tous les traités de mécanique quantique, mais qui est évidemment vraie dans un contexte classique[5] :

(12) $\qquad a.\sigma\, b.\sigma = a.b\,\mathbb{1} + i\,(a \times b).\,\sigma$

Quand on a un minimum de connaissances en algèbre géométrique et que l'on examine les différentes formules du groupe SU2, on ne peut manquer d'être frappé par d'évidentes similarités avec les calculs faits en GA. Ainsi la relation (12) représente simplement la décomposition du produit géométrique de deux vecteurs en un scalaire et un bivecteur :

(12)bis $\qquad ab = a.b + a \wedge b$

Je rappelle qu'en GA les matrices de base de SU(2) sont supposées être en fait des vecteurs. Tout devient alors simple, car les éléments en cause, objets ou opérateurs, font partie de $\mathbb{R}^3$ *et de son algèbre géométrique ; l'espace abstrait SU(2) et toutes les complications y afférentes disparaissent. On peut noter entre autres les transpositions suivantes[6] :*

(I-23) $\quad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}(\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x) = \sigma_x \wedge \sigma_y = i\sigma_z \qquad$ etc ....

Les σ_i *constituent, par construction, une base orthonormée.*

(7)bis $\qquad U(\theta, n) = e^{in\theta/2} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} n$

$U(\theta, n)$ *est un rotor, somme d'un scalaire et d'un bivecteur, c'est à dire un spineur GA unitaire.*

(9) bis $\qquad x' = UxU^{-1}$ *(rotation active)* $\qquad x = x^i \sigma_i$

5. Les relations (II-41) et (II-42) si semblables pourraient laisser penser que les σ et les J , qui satisfont aux mêmes relations de Lie (au facteur 1/2 près pour les σ), sont en quelque sorte interchangeables dans la théorie des groupes. En fait il n'en est rien car par exemple les matrices ${J_i}^2$ prises isolément ne sont pas égales à une matrice unité, ni égales entre elles. On ne peut pas construire une relation de type (12) avec les matrices J . Ceci n'est évidemment pas sans lien avec le fait que la relation entre SO(3) et SU(2) ne soit pas un isomorphisme, alors que celle entre SU(2) et son expression en GA l'est. Comme le dit B.Delamotte, le 1/2 est important ...

6. *L'appellation* σ_x *n'est évidemment pas un hasard, mais pas non plus une obligation ...*

(10) bis $\qquad R_{ij} = \sigma_i \,.(U\sigma_j U^{-1}) = \sigma_j \,.(U^{-1}\sigma_i U)$

(II-41) bis $\qquad U^{-1}\sigma_i U = R_{ij}\sigma_j$

Les relations (10 bis) et (II-41) sont une quasi-évidence en GA[7]*, contrairement à leurs homologues SU(2). Cela tient simplement au fait que les σ sont sans ambiguïté des vecteurs.*

Il est clair qu'il y a un isomorphisme entre SU(2) et la représentation du groupe des rotations en GA. De ce fait comme pour SU(2) l'application de SO(3) dans la GA est bivaluée.

L'analyse, à la lumière de cet isomorphisme, des pages 36 à 40 consacrées dans [1] aux changements de base pour les opérateurs vectoriels, est instructive. En effet, me semble-t-il, si au lieu de considérer directement SU(2) on examinait d'abord la question dans $\mathbb{R}^3$ avec la GA, les propriétés énoncées deviennent évidentes. Elles peuvent ensuite être transposées en SU(2). Plus précisément, une rotation des vecteurs de base σ_i en $\mathbb{R}^3$ se traduit par :

(13) $\qquad \sigma'_i = U\sigma_i U^{-1}$

En examinant les composantes des σ' dans le système σ' on obtient bien sûr :

(14) $\qquad \sigma'_i \,.\, \sigma'_k = \delta_{ik} = (U\sigma_i U^{-1})\,.(U\sigma_k U^{-1}) = < U\sigma_i U^{-1} U\sigma_k U^{-1} > = \sigma_i \,.\, \sigma_k \qquad !$

Puis en transposant cela par isomorphisme en SU(2) on obtient évidemment sans calcul le résultat (II-48) :

(II-48) bis $\qquad \hat{\sigma}^{(e)}_{e_i} = \hat{\sigma}^{(Re)}_{Re_i}$

c'est à dire des matrices $\hat{\sigma}$ inchangées après rotation. Ainsi quel que soit le choix fait dans $\mathbb{R}^3$ d'une base σ , on peut y associer dans SU(2) les matrices de Pauli et les bases propres correspondantes $\lceil \pm , z >$.

La différence entre la GA et la méthode SU(2) standard est en définitive que les générateurs de rotations $\hat{\sigma}$ ne sont pas simplement traités comme des vecteurs, ce sont des vecteurs σ ....! [8]

Tout ceci ne nous dit pas cependant à quoi peuvent servir les spineurs définis en (I-27). Ce n'est pas étonnant car leur utilisation en physique classique dans la forme de SU(2) est inexistante[9] *; ce ne serait qu'une complication inutile. En revanche on peut trouver dans ce domaine des exemples intéressants de méthodes spinorielles par la GA, ce qui est une confirmation supplémentaire de la supériorité de la GA sur les outils mathématiques traditionnels.*

On peut noter, cela constitue un peu une transition vers le quantique, que la démonstration donnée en page 45 de [1] du fait que σ pris en sandwich entre deux spineurs conjugués soit un vecteur, se traduit simplement en GA par une formule du type :

(15) $\qquad \tilde{\psi}\,\sigma_i\,\psi = \rho\,\sigma'_i \qquad\qquad (\psi = \rho^{\frac{1}{2}} R$ *est un spineur GA*)

c'est à dire par une rotation-dilatation.

En [2] figure également un intéressant calcul montrant l'action du groupe des rotations sur lui-même, qui s'exprime dans SO(3), avec des notations évidentes par :

7. La démonstration se fait directement par la GA, sans passer par l'algèbre de Lie. On écrit $x'^i \sigma'_i = x^j \sigma_j$, etc...

8. Peut-être cette analyse permettrait-elle de rassurer les physiciens qui pour des raisons compréhensibles hésitent à utiliser la GA: il est toujours possible de revenir en SU(2) si par extraordinaire, pour certaines études, la GA se révélait inapropriée.

9. Ceci ne veut pas dire bien entendu que les spineurs ne jouent aucun rôle en mathématiques pures. On sait qu'ils ont été introduits par Elie Cartan bien avant que l'on parle de mécanique quantique, et ont donné lieu à de grands développements.

$$(16) \qquad R_1 R_2 R_1^{-1} = R(\theta,n)R(\varphi,m)R^{-1}(\theta,n) = e^{i\theta n.J}e^{i\varphi m.J}e^{-i\theta n.J} = e^{i\varphi R(\theta,n)\, m.J R^{-1}(\theta,n)}$$

$$= e^{i\varphi[R(\theta,n)m].J} = R[\varphi, R(\theta,n)m]$$

ce qui veut dire que l'action de R_1 *sur* R_2 *est de maintenir l'angle de* R_2 *tout en faisant tourner son axe sous l'effet de* R_1 (a very reasonable and pleasant physical happening *dit l'auteur ...).*

Toutefois ce plaisant calcul est précédé de trois pages d'indispensables analyses préalables ! Or en GA ce résultat se démontre en une ligne :

$$(17) \qquad \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\tilde{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1(\cos\varphi + i\sin\varphi m)\tilde{\mathcal{R}}_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi\mathcal{R}_1\, m\, \tilde{\mathcal{R}}_1 \qquad !!$$

La transformation (I-27) des spineurs classiques est démontrée à grand renfort d'indices et de notations abstraites dans l'annexe III de [1]. Il est intéressant, autre rapprochement avec le quantique, de faire la comparaison avec une transformation de même type en GA. Je reprends ici une démonstration faite dans un cours de l'équipe de Cambridge disponible sur internet (voir aussi [3]).

On trouve en mécanique quantique des expressions du type $\psi v \tilde{\psi}$ *où* v *est un vecteur et* ψ *est un spineur, comme en (15). En particulier pour la définition du spin de l'électron on transforme un repère de base* σ_k *en un autre repère* e_k *par :*

$$(18) \qquad \rho e_k = \psi\sigma_k\tilde{\psi}$$

Que se passe-t'il si l'on change de repère initial sans modifier les e_k *considérés comme intrinsèques. On a :*

$$(19) \qquad \sigma_k = U\sigma_k'\tilde{U} \qquad\qquad \rho e_k = \psi U\sigma_k'\widetilde{U}\tilde{\psi} = \psi'\sigma_k'\tilde{\psi}'$$

$$(20) \qquad \psi' = \psi U$$

La signification géométrique de (20) explique la facilité de sa construction. Dans le cas particulier ou les plans des rotors sont confondus, l'angle φ *qui entre dans la définition du rotor contenu dans le spineur* ψ *est simplement augmenté de l'angle* θ *supplémentaire de rotation nécessaire pour passer des* σ_k' *aux* σ_k *puis aux* e_k *par* φ *. Dans le cas général il s'agit de la composition de deux rotations, opération très simple en GA.*

Je ne suis pas entré en profondeur dans l'étude des groupes en quantique, d'une part parce que cela nécessitait de la part du lecteur – et de moi-même – des connaissances, tant en méthode quantique standard qu'en GA quantique, allant sensiblement au-delà du champ de la présente note, d'autre part parce que la GA y apporte de tels bouleversements structurels que les rapprochements deviennent difficiles. Les modifications les plus frappantes sont :

– La disparition des nombres complexes ;

– l'expression de tous les éléments de la théorie dans une même algèbre , la GA associée à l'espace euclidien, ou à l'espace de Minkowski ;

– corrélativement la disparition des espaces de Hilbert et des vecteurs d'état abstraits.

La théorie des représentations du groupe des rotations, telle que présentée dans [1] permet cependant, et cela est très intéressant, de prolonger immédiatement en théorie quantique standard ce qui a été établi en physique classique, ainsi que je l'ai mentionné en introduction. Par exemple en changeant les états tout en gardant fixes les opérateurs, on a :

$$(\text{IV-12}) \qquad \rceil\, \psi'(t) > = U(\theta n, t)\, \rceil\, \psi(t) > \qquad\qquad < \psi' \rceil\, T_\alpha \upharpoonright \psi' > = [M(\theta)]_\alpha^{\ \beta} < \psi \rceil\, T_\beta \upharpoonright \psi >$$

$$(\text{IV-13}) \qquad \tilde{U}\, T_\alpha\, U = M_\alpha^{\ \beta} T_\beta$$

où U est l'opérateur unitaire représentant la rotation θn dans l'espace de Hilbert. Dans une rotation l'équation (IV-13) devient pour l'opérateur position :

(IV-16) $\tilde{U}(\theta n) X_i U(\theta n) = R_i{}^j X_j$

Les M et les U forment des représentations des groupes de symétrie pour respectivement les tenseurs classiques et les états quantiques.

Dans son encadré (IV), page 53, l'auteur de [1] met en evidence de manière très intéressante la cohérence des axiomes de la mécanique quantique, notamment entre la notion d'espace de Hilbert et le fait que (SO3) soit une représentation vraie de son groupe de recouvrement universel SU(2). Il est frappant de voir que la GA en apportant une représentation d'un type très différent, bien qu'isomorphe avec SU(2), change cette situation d'une manière que l'auteur visiblement n'imaginait pas. Cette réflexion mériterait peut-être d'être poursuivie, ne serait- ce que du point de vue de la philosophie de la Science ...

J'ai également renoncé à traiter ici le cas des groupes de Lorentz et de Poincaré. Je me bornerai à signaler que la facilité apportée par la GA dans ce domaine est encore beaucoup plus impressionnante qu'en $\mathbb{R}^3$ *. C'est ainsi qu'une transformation de Lorentz dans l'espace de Minkowski se caractérise par un rotor* R *décomposable en un produit* LU *où* L *est un boost et* U *une rotation spatiale, ce qui équivaut à l'équation (III-63). Ces notions sont beaucoup plus faciles à manipuler que les calculs tensoriels et les abstraites transpositions en matrices dans SO(3,1) et SL(2,C). Je renvoie le lecteur intéressé aux nombreux travaux de David Hestenes traitant de ces sujets (notamment [4] .*

G.Ringeisen

Octobre 2008

[1] Un soupçon de théorie des groupes – B.Delamotte – www.lpthe.jussieu.fr/DEA/

[2 Useful notes for the rotation group (voir internet)

[3] Geometric algebra for Physicists – Chris Doran - Anthony Lasenby (cours équivalent sur internet)

[4] Spacetime Physics with Geometric Algebra – David Hestenes (voir internet)