La transformation de Lorentz, vue en algèbre géométrique.

Dans son document « Spacetime Calculus » disponible sur Internet, David Hestenes explique comment, connaissant le rotor R d'une transformation de Lorentz, on peut décomposer celle-ci en le produit LU d'une rotation d'espace U et d'un boost L , ce dernier s'identifiant à la transformation simple bidimensionnelle exposée dans les ouvrages élémentaires. Son texte présente l'inconvénient de ne pas dire comment on peut connaître R sachant que la donnée de départ serait constituée par les deux référentiels en cause. Nous comblerons cette lacune dans la section II de la présente note, ce qui nous permettra aussi de compléter une analyse figurant dans l'ouvrage « Geometric Algebra for Physicists » de Doran et Lasenby.

Cependant en pratique le problème se présente sans doute différemment. Il s'agirait, partant d'un référentiel initial $S(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ connu dans l'espace de Minkowski, et d'un vecteur temps final $(\gamma_0'' = v)$ donné à l'avance, de déterminer de la façon la plus simple possible un repère intermédiaire S' obtenu par une rotation de rotor U, puis le repère final S'' obtenu à partir de S' par un « boost » L élémentaire, composant donc un rotor $R = LU$ caractérisant le passage de S à S'' . C'est ce que nous allons faire dans l'exemple concret ci-dessous.

I. Exemple pratique : rotation d'espace et « boost ».

Nous imposons :

(1) $\gamma_0' = \gamma_0 \qquad\qquad \gamma_0'' = v \qquad\qquad$ et que γ_1' soit dans le plan (γ_0 , v).

Nous vérifierons que ceci implique également :

(2) γ_1'' dans le plan $(\gamma_0 , v) \qquad\qquad \gamma_1' \gamma_0 = \gamma_1'' v$

Soit donc R le rotor global :

(3) $R = LU$

Nous allons montrer que tous les éléments du problème peuvent être définis en algèbre géométrique par des formules relativement simples en fonction des seules données suivantes :

(4) $\gamma_0 ,\ \gamma_1 ,\ v = \gamma_0''$

Rappelons d'abord que nous pouvons décomposer v en un vecteur parallèle et un vecteur perpendiculaire à γ_0 :

(5) $v = v\gamma_0\gamma_0 = v\,.\gamma_0\gamma_0 + v \wedge \gamma_0\gamma_0$

Nous définissons γ_1' par :

(6) $\gamma_1' = \lambda v \wedge \gamma_0\gamma_0 \qquad\qquad \lambda = [(v\,.\gamma_0)^2 - 1]^{-1/2}$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on a donc :

(7) ${\gamma_1'}^2 = -1 \qquad\qquad \gamma_1' \wedge \gamma_0 \wedge v = 0$

Donc la troisième hypothèse (1) est satisfaite.

Le rotor U doit être tel que :

(8) $U\gamma_0\tilde{U} = \gamma_0' = \gamma_0 \qquad\qquad U\gamma_1\tilde{U} = \gamma_1' \qquad\qquad$ (ou encore $U\gamma_1 = \gamma_1' U$)

Or pour passer de γ_1 à γ_1' dans le plan (γ_1', γ_1) on peut écrire :

(9) $\gamma_1' = -(\gamma_1'\gamma_1)\gamma_1$

Posons :

(10) $\quad U^2 = -(\gamma_1'\gamma_1)$ $\quad$ et vérifions que les relations (8) sont satisfaites. En effet :

(11) $\quad U = (1 - \gamma_1'\gamma_1)/|\gamma_1' + \gamma_1|$

Les relations (8) en découlent aisément {notons que -voir relation (6)- , γ_0 commute avec $\gamma_1'\gamma_1$ et que $|\gamma_1' + \gamma_1|^2 = -(\gamma_1' + \gamma_1)^2$ }.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer γ_1'' et le boost L . Puisque $\gamma_0' = \gamma_0$, $\gamma_0'' = v$, γ_1' sont dans un même plan, γ_1'' doit être dans ce plan, et nous devons écrire :

(12) $\quad L\gamma_0\tilde{L} = \gamma_0'' = v \qquad L\gamma_1'\tilde{L} = \gamma_1''$

(13) $\quad v = (v\gamma_0)\gamma_0 \qquad L^2 = v\gamma_0$

(14) $\quad L = (1 + v\gamma_0)/|v + \gamma_0|$

On vérifie facilement :

(15) $\quad \gamma_1''\, v = \gamma_1'\, \gamma_0 = \lambda v \wedge \gamma_0 \qquad \gamma_0'' = L^2\gamma_0 \qquad \gamma_1'' = L^2\gamma_1'$

En résumé nous avons donc calculé :

(16) $\quad \lambda = [(v\,.\,\gamma_0)^2 - 1]^{-1/2} \qquad \gamma_1' = \lambda v \wedge \gamma_0\gamma_0 \qquad \gamma_1'' = \lambda v \wedge \gamma_0\, v$

(17) $\quad U = (1 - \lambda v \wedge \gamma_0\gamma_0\gamma_1)/|\lambda v \wedge \gamma_0\gamma_0 + \gamma_1|$

(18) $\quad L = (1 + v\gamma_0)/|v + \gamma_0|$ $\qquad$ et $\qquad R = LU$

C'est bien le résultat que nous avions annoncé. On note que γ_2 , γ_3 n'interviennent pas dans ce calcul, sauf évidemment s'il y avait lieu dans un calcul numérique de préciser la position du vecteur v dans le référentiel initial.

Cet exemple serait incomplet si l'on ne donnait pas au moins quelques indications sur la possibilité de faire le même calcul à l'aide des outils vectoriels et tensoriels classiques. Le lecteur courageux qui relèverait ce défi se heurterait rapidement à de redoutables difficultés. Il trouverait certes rapidement une définition de γ_1' sous la forme développée :

(19) $\quad \gamma_1' = \lambda(v - v.\gamma_0\,\gamma_0)$

Ceci laisse le choix d'une infinité simple de plans directeurs de la rotation, dont le plan (γ_1, γ_1') adopté en GA, permettant de passer de γ_1 à γ_1' . Il reste alors 6 coefficients indéterminés dans la matrice de rotation, satisfaisant à 5 équations, dont 3 sont quadratiques ! Le choix délibéré du plan (γ_1, γ_1') réduit le problème à 4 inconnues.

La lourdeur de l'outil classique vient du fait que la rotation n'y est parfaitement définie que lorsque tous les coefficients de la matrice ont été calculés. Cette exigence n'existe pas en GA où la rotation est entièrement définie par le rotor U donné par (17). Encore convient-il de rappeler que les caractéristiques élémentaires de la rotation – plan directeur, angle – ne sont pas mises en évidence dans la matrice, alors qu'elles apparaissent naturellement dans le rotor.

II. Complément théorique.

Nous nous fixons ici comme objectif de montrer comment l'on peut obtenir en toute généralité le rotor R d'une transformation de Lorentz supposée définie par la donnée a priori des deux référentiels en espace de Minkowski, initial e_μ , final f_μ , orthonormaux de même orientation et tels que $f_0 . e_0 \geqslant 0$ pour préserver la causalité.

Nous savons que le rotor R doit être de la forme (multivecteur pair) :

(1) $\quad R = \alpha + \boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b} + i\beta$

où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs relatifs, c'est à dire des bivecteurs d'espace-temps de type $\gamma_i\gamma_0$. Donc :

(2) $\quad \tilde{R} = \alpha - \boldsymbol{a} - i\,\boldsymbol{b} + i\beta$

(3) $\quad R\,\tilde{R} = \alpha^2 - \beta^2 - \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2i(\alpha\beta - \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) = 1 \qquad$ (par définition)

On vérifie qu'il peut s'agir d'une transformation du sous-groupe propre orthochrone , car :

(4) $\quad e_0 . f_0 = < e_0\, R e_0\, \tilde{R} > = \alpha^2 + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \beta^2 > 0$

La transformation s'écrit :

(5) $\quad f_\mu = R e_\mu \tilde{R}$

D'une manière analogue au calcul plus simple fait en $\mathbb{R}^3$, nous évaluons :

(6) $\quad f_\mu\, e^\mu = R e_\mu\, \tilde{R}\, e^\mu = 4(\alpha + i\beta)R \qquad$ car dans Minkowski $\qquad e_\mu(\boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b})e^\mu = 0$

Nous notons d'autre part que :

(7) $\quad R + \tilde{R} = 2(\alpha + i\beta) \qquad\qquad R - \tilde{R} = 2(\boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b})$

(8) $\quad e^\mu\, f_\mu = 4(\alpha + i\beta)\tilde{R}$

(9) $\quad f_\mu . e^\mu = \frac{1}{2}(f_\mu\, e^\mu + e^\mu\, f_\mu) = 2(\alpha + i\beta)(R + \tilde{R}) = 4(\alpha + i\beta)^2 = 4(\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta)$

(10) $\quad f_\mu \wedge e^\mu = \frac{1}{2}(f_\mu\, e^\mu - e^\mu\, f_\mu) = 2(\alpha + i\beta)(R - \tilde{R}) = 4(\alpha + i\beta)(\boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b})$

Il apparaît que (3) et (9) impliquent[1] :

(11) $\quad \alpha\beta = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0$

(12) $\quad \alpha^2 - \beta^2 - \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = 1$

Nous nous posons maintenant la question de la détermination de R lorsque les deux repères e_μ et f_μ sont donnés a priori (nous rappelons que $e^\mu = \eta^{\mu\nu}\, e_\nu$, où $\eta^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace de Minkowski). **Considérons d'abord le cas $\boldsymbol{\beta = 0}$** . Alors :

(13) $\quad f_\mu\, e^\mu = 4\,\alpha R = 4\alpha(\alpha + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{b})$

(14) $\quad f_\mu . e^\mu = 4\alpha^2 > 0 \qquad$ (condition qui permet le choix entre α et β)

(15) $\quad f_\mu \wedge e^\mu = 4\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{b})$

(16) $\quad f_\mu\, e^\mu\, e^\nu f_\nu = 16\alpha^2$

(17) $\quad R = f_\mu\, e^\mu / 4\,\alpha = f_\mu\, e^\mu / (f_\mu\, e^\mu\, e^\nu f_\nu)^{1/2}$

1. Les conditions (11) et (12) ne sont pas explicitées dans l'ouvrage « Geometric Algebra for Physicists » de Doran et Lasenby, ce qui suffit à justifier la présente note ....

Mais pourrions-nous aussi avoir $\alpha = 0$ **?** Dans ce cas :

(18) $f_\mu \, e^\mu = 4 i \beta R = 4 i \beta (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{i} \boldsymbol{\beta})$

(19) $f_\mu \, . e^\mu = -4\beta^2 < 0$ (l'égalité simultanée $\alpha = \beta = 0$ est évidemment exclue)

(20) $f_\mu \wedge e^\mu = 4 i \beta (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{b})$

(21) $f_\mu \, e^\mu \, e^\nu f_\nu = -16\beta^2$

(22) $R = -\, i \, f_\mu \, e^\mu / 4\beta = -\, i \, f_\mu \, e^\mu / (-\, f_\mu \, e^\mu \, e^\nu f_\nu)^{1/2}$

Il est facile cependant de montrer que dans ce cas la transformation faisant passer des e_μ aux f_μ ne pourrait pas être orthochrone propre. En effet $f_\mu \, . e^\mu < 0$ impliquerait $-\, f_\mu \, . e^\mu > 0$. On pourrait alors en déduire :

(23) $f_0 \, . e^0 - f_i \, . e^i > 2 f_0 \, . e^0 > 0$

Ceci veut dire que c'est la transformation $(e_\mu) \to (f_0 \, , \, -\, f_i)$ qui est orthochrone propre. La transformation initiale $(e_\mu) \to (f_\mu)$ correspond donc à une inversion spatiale sans inversion temporelle. Dans ce cas d'ailleurs la formule :

(24) $f_0 \, f_1 f_2 \, f_3 = \det(\mathcal{R}) \, e_0 \, e_1 \, e_2 \, e_3 = -\,(f_0)(-\, f_1)(-\, f_2)(-\, f_3)$

montre que le déterminant de la transformation $(e_\mu) \to (f_\mu)$ doit être égal à -1 .

En conclusion la formulation (1) de R implique $f_0.e^0 = f_0.e_0 > 0$, mais ne suffit pas pour que deux repères, (e_μ) et (f_μ) , soient reliés par une transformation de Lorentz propre orthochrone. Il faut en outre que l'on ait $f_\mu \, . e^\mu > 0$. Une telle transformation s'exprime alors par un rotor de la forme :

(25) $R = \alpha + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{b} = f_\mu \, e^\mu / 4\alpha = f_\mu \, e^\mu / (f_\mu \, e^\mu \, e^\nu f_\nu)^{1/2}$

avec $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0$ et $\alpha^2 - \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = 1$ et (14) , (15) , (16) .

Il est clair qu'une telle transformation peut être reliée continuement à la transformation identité, puisque f_μ peut être rendu infiniment proche de e_μ .

Enfin il est intéressant de noter que le produit LU de l'exemple pratique développé dans la section I est de la forme $R = \alpha + F$, où F est un bivecteur , ce qui confirme donc l'analyse théorique faite ci-dessus.

Ces calculs mettent une fois encore en évidence la puissance et la souplesse de l'outil mathématique « algèbre géométrique ». Combien d'années faudra-t-il encore attendre avant que ingénieurs et physiciens puissent largement en bénéficier ?

G.Ringeisen

Octobre 2008