Orbites kepleriennes vues en algèbre géométrique.

L'idée d'examiner cette question m'est venue d'un problème de concours qui m'a été soumis. Je sais bien sûr que ce vaste sujet a été traité avec un soin extrême, depuis plus de trois siècles, par les plus grands savants, tant sur le plan théorique que pratique, et porté à un haut degré de perfectionnement. Il n'y a donc guère d'espoir d'apporter grâce à l'outil « algèbre géométrique » une valeur ajoutée significative ayant une réelle portée pratique. Il en va autrement si l'on s'intéresse à des développements plus savants dans le domaine des champs gravitationnels, de la relativité générale, de l'étude des trous noirs, etc ... . Mais ces sujets sont évidemment hors du champ de la présente note.

En examinant la littérature existante je me suis aperçu sans surprise que les orbites kepleriennes sous leurs aspects classiques (théorie élémentaire, théorie des perturbations, ...) n'avaient été traitées en GA que brièvement par l'équipe de Cambridge [1] et, de manière plus détaillée, par David Hestenes [2] . C'est donc de son texte que je vais principalement m'inspirer, en m'efforçant – plus royaliste que le roi – de n'utiliser strictement que la GA. En effet Hestenes, qui espérait sans doute être lu aussi par des professionnels, a essayé de ne pas trop s'éloigner des formulations traditionnelles. Il a donc utilisé largement, pour l'étude des perturbations, un système mixte faisant appel au simple et au double produit vectoriel.

Pour ma part, qui écris surtout pour des amateurs, j'insisterai sur la souplesse apportée par l'algèbre géométrique dans l'analyse théorique du problème, et sur le fait que son caractère « coordinate free » permet une compréhension intuitive des phénomènes perturbatifs bien meilleure qu'avec les outils classiques. Pour ces derniers le lecteur se reportera notamment à l'excellent cours de mécanique céleste classique de Luc Duriez [3] disponible sur internet, ainsi qu'aux exemples pratiques d'application associés. Il constatera que les principales difficultés qu'il rencontrera viendront non de sa compréhension des équations de la mécanique rationnelle, mais du fait qu'il sera très vite obligé de s'initier aux divers et complexes systèmes de coordonnées et de paramétrisations utilisés par les astronomes professionnels.

Inversement la GA permettra aux amateurs de belles mathématiques, désirant s'initier à la mécanique céleste, d'entrer dans ce domaine en faisant l'économie dans un premier temps de toute la « cuisine »[1] nécessaire pour passer aux applications pratiques.

I. Quelques rappels de GA et de notations.

Sauf exceptions signalées nous noterons :

scalaires α , γ , ε , ρ vecteurs a, b, u bivecteurs A, B

dérivée temporelle $\dot{r}$, $\dot{L}$ pseudoscalaire i $(i^2 = -1)$

produit géométrique $ab = a.b + a \wedge b$

produit intérieur $a.b = b.a = 1/2(ab + ba)$

produit extérieur $a \wedge b = -b \wedge a = 1/2(ab - ba)$ (Il s'agit d'un bivecteur qui ne peut se confondre avec le classique produit vectoriel)

bivecteurs $L = il$ $a \wedge b$

1. Dans un pays où la cuisine est reine, une telle appréciation ne saurait être considérée comme péjorative.

« reverse » $(a\wedge b)^{\tilde{}} = b\wedge a = -a\wedge b$ $\quad \tilde{L} = -L \quad \tilde{l} = l \quad \tilde{i} = -i$

associativité $(ab)c = a(bc) \qquad (a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

colinéarité, coplanéité $a\wedge b = 0 \qquad a\wedge b\wedge c = 0 \qquad L\wedge r = 0$

divers $a^2 = \|a\|^2 \qquad L^2 = -\|L\|^2 = -L\tilde{L} = -\lambda^2$

$(a\wedge b)^2 = (a.b)^2 - a^2b^2 \qquad (-\sin^2\varphi = \cos^2\varphi - 1)$.......!

$ia = ai \qquad iL = Li \qquad i^2 = -1$

$aB = a.B + a\wedge B \qquad a.(b\wedge c) = a.b\,c - a.c\,b = -(b\wedge c).a$

$a\wedge b\wedge c = i\det(a,b,c)$

(pour plus de détails voir le cours de Cambridge sur internet).

II. Eléments de base d'une trajectoire keplerienne.

L'équation de Newton.

(1) Vecteur de position de la planète étudiée $\quad r = \rho u \qquad u^2 = 1 \qquad \rho = \|r\|$

u et ρ sont évidemment fonctions de $r(t)$.

Soit donc une planète de masse μ_1 attirée par un soleil de masse μ_0 . En se plaçant dans un repère solaire – ce qui en GA veut dire simplement, sans préciser davantage, que l'on prend le soleil comme origine du rayon vecteur – l'équation de Newton s'écrit :

(2) $\quad \mu_1\ddot{r} = -(\mathcal{G}\mu_0\mu_1)\rho^{-2}u \qquad \alpha = \mathcal{G}\mu_0$

(3) $\quad \ddot{r} = -\alpha\rho^{-2}u \qquad v = \dot{r} = \dot{\rho}u + \rho\dot{u} \qquad u.\dot{u} = 0$

On note que la masse μ_1 s'élimine ; un petit pois décrit, toutes choses égales par ailleurs, la même trajectoire autour du Soleil que la Terre. C'est l'occasion toutefois de noter, nous y reviendrons, que le repère choisi n'est pas galiléen puisque, comme la Terre, le petit pois exerce une force d'attraction sur le Soleil. Les deux trajectoires ne sont donc pas identiques au sens mathématique du terme !

Le moment cinétique.

Considérons maintenant le moment cinétique de la Terre. Il est par définition (à partir de là nous considèrons que l'unité de masse est la Terre) :

(4) $\quad L = r\wedge v = il \quad$ ce qui est cohérent avec la définition usuelle $\quad l = r\times v \quad$ mais si nous avons besoin de l nous écrirons $\quad l = -iL = -i(r\wedge v)$.

Il est intéressant de noter que d'après (1) et (3) L s'écrit aussi :

(4bis) $\quad L = \rho^2 u\wedge\dot{u} = \rho^2 u\dot{u}$

(5) $\quad \dot{L} = \dot{r}\wedge v + r\wedge\dot{v} = v\wedge v - \alpha\rho^{-2}r\wedge u = 0 + 0 = 0$

Donc $\quad L = L_0 =$ Cte du mouvement. Comme $\quad L\wedge v = L\wedge r = 0 \quad$ il en découle que le plan de l'orbite est déterminé par les conditions initiales et reste immuable (hors perturbations évidemment).

La loi des aires.

La loi des aires s'impose d'elle-même :

(6) $\quad L\,dt = r \wedge (v\,dt) = r \wedge (r + v\,dt) = 2d\mathcal{A} \qquad L/2 = d\mathcal{A}/dt$

Donc si $S(t)$ est la valeur arithmétique de l'aire on a :

(7) $\quad \int_0^t \frac{1}{2}\lambda\, d\tau = S[\theta(t)] - S(0) \qquad \frac{1}{2}\lambda T = S(2\pi) = \pi\left|a\right|\left|b\right|$

où $|a|$ et $|b|$ sont les longueurs des demi-axes de la trajectoire.[2]

Le vecteur de Laplace.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le vecteur de Laplace (soyons chauvins ...) en notant que :

(8) $\quad L\dot{v} = \rho^2 u\,\dot{u}\,(-\alpha u \rho^{-2}) = -\alpha u \dot{u} u = \alpha u^2 \dot{u} = \alpha \dot{u}$

(9) $\quad L\dot{v} - \alpha\dot{u} = 0$

(10) $\quad Lv - \alpha u = \alpha e \quad$ où e représente donc un vecteur (excentricité) constant.

A partir de (10) nous pouvons définir un vecteur unitaire u_p tel que :

(11) $\quad e = \varepsilon u_p \qquad$ où ε est un scalaire sans dimension

Il est évident sans calcul que le vecteur e est colinéaire avec l'axe des foyers de l'orbite.

A partir de (10) nous pouvons immédiatement définir l'hodographe, c'est à dire le lieu de l'extrémité du vecteur v si son origine est placé en un point fixe choisi ici au foyer de l'ellipse trajectoire. On a :

(10 bis) $\quad v = \alpha L^{-1}(u + \varepsilon u_p)$

Il s'agit d'un cercle centré en $\alpha\varepsilon L^{-1}u_p$, de rayon $\alpha\lambda^{-1}$ (notons que $(L^{-1}u_p).u_p = 0$) .

L'invariance de l'énergie totale.

Redémontrons l'invariance de l'énergie de la Terre sur sa trajectoire, en oubliant provisoirement le problème du repère solaire non galiléen :

(12) $\quad \mathcal{E} = (1/2)v^2 - \alpha\rho^{-1} \qquad \dot{\mathcal{E}} = v.\dot{v} + \alpha\dot{\rho}\rho^{-2} = (\dot{\rho}\,u + \rho\,\dot{u}).(-\alpha\rho^{-2}u) + \alpha\dot{\rho}\rho^{-2} = 0$

Trois invariants liés.

Enfin il est facile de montrer qu'il existe une relation entre les trois invariants $L, e, \mathcal{E}$. En effet :

(13)
$$\begin{aligned}\alpha\varepsilon\alpha\varepsilon = \alpha^2\varepsilon^2 &= (Lv - \alpha u)(Lv - \alpha u) = -(Lv - \alpha u)(vL + \alpha u)\\ &= -L^2v^2 + \alpha(uvL - Lvu) + \alpha^2u^2 = -L^2v^2 - 2\alpha Lv \wedge u + \alpha^2\\ &= \lambda^2(v^2 - 2\alpha\rho^{-1}) + \alpha^2 = 2\lambda^2\mathcal{E} + \alpha^2\end{aligned}$$

(14) $\quad \alpha^2(\varepsilon^2 - 1) = 2\lambda^2\mathcal{E}$

2. Attention, je n'utilise pas a et b pour désigner des vecteurs.

L'équation de la trajectoire.

Il nous reste à déterminer, à partir des données initiales r_0, v_0, l'équation de la trajectoire et ses points caractéristiques. Ces données fournissent immédiatement L, λ, e, ε, $\mathcal{E}$. Il est naturel de chercher dans le plan, connu, de l'orbite une relation entre ρ et l'angle [3] w que fait r avec e . On a :

(15) $\quad u_p\,.u = \cos w$

Il est assez naturel de penser à multiplier le vecteur $u + e = u + \varepsilon u_p = \alpha^{-1} L v$ par r . On obtient alors :

(16) $\quad \alpha^{-1} L v r = (u + e) r$

La partie scalaire [4] de cette équation donne ;

(17) $\quad \rho(1 + \varepsilon u_p\,.u) = \alpha^{-1} < L v r > = \alpha^{-1} L v \wedge r = \alpha^{-1} L \tilde{L} = \alpha^{-1}\lambda^2$

(18) $\quad \rho = \alpha^{-1}\lambda^2(1 + \varepsilon u_p\,.u)^{-1} = \alpha^{-1}\lambda^2(1 + \varepsilon \cos w)^{-1}$ [5]

Bien entendu

(19) $\quad \lambda^2 = -L^2 = [r^2 v^2 - (r.v)^2] = [r^2 v^2 - (r.v)^2]_0$

Le périhélie p est donné par $(w = 0)$:

(20) $\quad r_p = \rho_p\, u_p = u_p\, \alpha^{-1}\lambda^2(1 + \varepsilon)^{-1}$

L'aphélie correspond à $w = \pi$, soit :

(22) $\quad r_a = -\rho_a\, u_p = -u_p\, \alpha^{-1}\lambda^2(1 - \varepsilon)^{-1}$

Je laisse au lecteur le soin de démontrer les relations suivantes [6] :

(23) $\quad \left|a\right| = \alpha^{-1}\lambda^2(1 - \varepsilon^2)^{-1} \qquad \left|b\right| = \alpha^{-1}\lambda^2(1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \qquad \mathcal{E} = -\alpha/(2\left|a\right|)$

(24) $\quad \lambda T = 2\pi\,|a|\,|b| \qquad T^2\,|a|^{-3} = 4\pi^2\,\alpha^{-1}$

III. Eléments pour l'étude des perturbations.

Rappels de cinématique.

Nous pouvons être amenés à étudier le déplacement d'une orbite planétaire et donc de son plan, faible mais non négligeable à terme, du fait de diverses perturbations produites par des éléments divers tels que : correction d'un repère non parfaitement galiléen, forme de la planète étudiée, effets de marée, influence d'une ou plusieurs autres planètes.

Dans une telle étude on peut être amené à caractériser la position du plan de l'orbite par la position d'un vecteur unitaire $\hat{e}_3$ normal à ce plan et la donnée d'un autre vecteur unitaire $\hat{e}_1$ appartenant au plan. On a donc ainsi défini un « solide » immatériel auquel on peut faire accomplir une rotation dans l'espace à partir d'une position initiale caractérisée par un repère fixe $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$. Soit $R(t)$ le rotor décrivant cette rotation. Un point quelconque soumis à cette action cinématique satisfera donc aux équations suivantes :

3. Les astronomes donnent à cet angle le curieux nom d'*anomalie vraie*.

4. En exploitant la partie bivectorielle de cette équation j'ai trouvé l'intéressante relation $\dot{\rho} = \alpha\varepsilon\lambda^{-1}\sin w$, que l'on retrouve sous une autre forme dans les exposés classiques. Dès que l'on rentre dans le détail on tombe dans la difficulté des multiples paramétrisations pratiques.

5. Attention, il y a ici risque de confusion. J'appelle r_p le vecteur joignant l'origine au périhélie. $r_p = \rho_p\, u_p$, par cohérence de notation en GA. Les astronomes appellent p le scalaire $\alpha^{-1}\lambda^2$.

6. Pour $|b|$ on cherchera les points pour lesquels v est parallèle à u_p .

(25) $\quad x(t)=\tilde{R}(t)\,x(0)\,R(t) \qquad$ avec $\qquad \tilde{R}\,R=1$

(26) $\quad \dot{x}=\dot{\tilde{R}}\,x(0)R+\tilde{R}x(0)\dot{R}$

Ceci est en particulier vrai pour les vecteurs de base du repère choisi :

(27) $\quad \dot{e}_3=\dot{\tilde{R}}\,\sigma_3 R+\tilde{R}\,\sigma_3\,\dot{R} \qquad$ etc .....

La contrainte unitaire sur le rotor entraîne :

(28) $\quad \dot{\tilde{R}}\,R+\tilde{R}\,\dot{R}=0$

Si alors nous tentons d'écrire $\dot{R}$ sous une forme :

(29) $\quad \dot{R}=\frac{1}{2}R\Omega \qquad \dot{\tilde{R}}=\frac{1}{2}\tilde{\Omega}\,\tilde{R} \qquad 0=\tilde{\Omega}\,\tilde{R}\,R+\tilde{R}R\Omega=\tilde{\Omega}+\Omega$

nous voyons immédiatement que Ω ne peut être qu'un bivecteur. Donc nous avons le droit de poser :

(30) $\quad \dot{R}=\frac{1}{2}R\Omega \qquad \dot{\tilde{R}}=-\frac{1}{2}\Omega\,\tilde{R}$

expressions dans lesquelles $\Omega = i\omega$ représentent respectivement le bivecteur et le vecteur de rotation instantanée. Il ne s'agit là que de cinématique, ce sont les équations de la dynamique qui nous permettront de déterminer les valeurs instantanées de ces éléments.

Mais nous pouvons pousser encore plus loin cette analyse. En effet nous serons amenés à nous servir plus particulièrement, pour caractériser l'orbite avant et après perturbation, des vecteurs suivants :

(31) $\quad l=-\,i\,r\wedge v=\lambda\,\hat{l} \qquad$ dual du moment cinétique

(32) $\quad e=\varepsilon\,\hat{e} \qquad$ vecteur de Laplace

dont les supports unitaires sont définis par :

(33) $\quad \hat{l}=\tilde{R}\,\sigma_3\,R \qquad \hat{e}=\tilde{R}\,\sigma_1\,R$

avec :

(34) $\quad \dot{\hat{l}}=-\frac{1}{2}\Omega\,\tilde{R}\sigma_3 R+\frac{1}{2}\tilde{R}\sigma_3 R\Omega=-\frac{1}{2}\Omega\,\hat{l}+\frac{1}{2}\hat{l}\,\Omega=\hat{l}\,.\,\Omega \qquad \dot{\hat{e}}=\hat{e}\,.\,\Omega$

(35) $\quad \dot{l}=l.\Omega+\dot{\lambda}\,\hat{l} \qquad \dot{e}=e.\Omega+\dot{\varepsilon}\,\hat{e}$

En l'absence de perturbation $\dot{\lambda}=\dot{\varepsilon}=0$ et $\Omega=0$.

Il est intuitivement et géométriquement évident que la connaissance, par la dynamique, de $\dot{l}$ et de $\dot{e}$, suffit pour déterminer Ω à chaque instant.

Un calcul simple permet d'obtenir ce résultat :

(36) $\quad l\wedge\dot{l}=l\wedge[l.(i\omega)]=l\wedge[(l\wedge\omega)i]=l.(l\wedge\omega)i=l^2\omega i-l.\omega l i=\lambda^2\,\Omega-l.\omega L$

(37) $\quad e\wedge\dot{e}=\varepsilon^2\,\Omega-e.\omega\,e i$

(38) $\quad (e\wedge\dot{e})\wedge l=\varepsilon^2\,\Omega\wedge l-e.\omega\,(e i)\wedge l=\varepsilon^2\,\Omega\wedge l=\varepsilon^2\,i\,\omega.l$

(39) $\quad \omega.l=-\,\varepsilon^{-2}\,i\,e\wedge\dot{e}\wedge l$

Donc en reportant (39) dans (36) :

(40) $\quad \Omega=\lambda^{-2}\,l\wedge\dot{l}+\lambda^{-2}\varepsilon^{-2}\,(e\wedge\dot{e}\wedge l)\,l=\lambda^{-2}\,l\wedge\dot{l}+\lambda^{-2}\varepsilon^{-2}\,\det(e,\dot{e},l)\,L$

(41) $\quad \Omega=\hat{l}\wedge\dot{\hat{l}}+\det(\hat{e},\dot{\hat{e}},\hat{l})\,i\,\hat{l}$

On peut utiliser soit (40) ou (41) en notant que la variation de λ et de ε ne change rien au résultat. En portant cette valeur de Ω dans les relations (35) on vérifie bien entendu son exactitude, grâce à la condition $e.l=0$.

Ce qui est très intéressant avec la GA, c'est que l'on peut dès à présent donner des indications qualitatives sur la nature des modifications qu'apporteront les facteurs perturbatifs.

C'est ainsi que tout vecteur rigidement lié au plan de l'orbite – c'est le cas de l et e si l'on suppose que leur taille ne varie pas – , va subir un double mouvement instantané de rotation, l'un autour d'un axe perpendiculaire à l et $\dot{l}$, donc situé dans le plan de l'orbite, dans le sens indiqué par $\hat{\dot{l}}$ (basculement du plan orbital), l'autre autour de l'axe l (rotation de l'orbite toute entière). Les (jeunes) lecteurs familiarisés avec les simulateurs de vol comprendront ce que je veux dire ... . A cela viendra s'ajouter le cas échéant un mouvement radial de type $\dot{\lambda}\, l$. Il est très difficile de décrire cela d'une manière aussi claire avec des doubles produits vectoriels.

Les principes de base du calcul des perturbations.

Le principe sur lequel repose le calcul des perturbations est en gros[7] de même nature que celui qui régit la définition des enveloppes de courbes paramétriques. La courbe réelle décrite par la planète perturbée, par exemple la Terre perturbée par Jupiter, est en chacun de ses points tangente à l'orbite non perturbée obtenue en ce point, à l'instant t_0 avec les données $r(t_0), v(t_0)$. La courbe réelle est donc en quelque sorte l'enveloppe d'une succession continue d'orbites dites osculatrices. La représentation, avec un certain pas de temps, de la succession des orbites se traduit donc par des feuilles de marguerites très serrées, qui traduisent le fait que l'on peut en première approximation garder pendant une ou plusieurs révolutions les mêmes paramètres de base, puis faire varier les paramètres lorsque l'effet cumulé moyen des perturbations le justifie. C'est ce que l'on appelle les perturbations séculaires. Il est clair qu'une telle méthode n'est applicable que dans les cas où les effets perturbatifs sont très faibles ; de toute évidence ce qui est vrai pour l'orbite terrestre ne l'est pas pour un satellite d'observation.

Mais pour l'instant nous nous intéressons à ***l'effet instantané des perturbations.***

Nous supposerons en toute généralité que les forces perturbatrices s'exerçant sur le centre de gravité de la planète Terre puissent à un instant donné être résumées par une force unique $f[r(t)]$, par unité de masse. L'équation (3) devient alors, à l'instant t étudié :

(42) $\ddot{r} = -\alpha\rho^{-2}u + f$

Et l'on obtient :

(43) $\dot{L} = i\,\dot{l} = \dot{r}\wedge v + r\wedge\ddot{r} = r\wedge f$

(44) $\dot{e} = \alpha^{-1}(\dot{L}v + L\dot{v} - \alpha\dot{u}) = \alpha^{-1}(\dot{L}v + Lf) = \alpha^{-1}[(r\wedge f).v + (r\wedge v).f]$

$= \alpha^{-1}(2v.fr - f.rv - r.vf)$

Ces relations transportées dans (40) donnent la valeur instantanée de Ω . Le bivecteur rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire à $l\wedge\dot{l}$ s'écrit :

(45) $\Omega_1 = \lambda^{-2}\, l\wedge\dot{l} = \lambda^{-2}(ir\wedge v)\wedge(ir\wedge f) = i(r\wedge v).(ir\wedge f) = r(r\wedge v\wedge f) = l.f\,ir$

ce qui montre immédiatement que l'axe en question est le rayon vecteur considéré pour le calcul perturbatif. La direction de cet axe ne dépend pas de la force perturbatrice ; c'est tout simplement celle qui s'impose d'un point de vue cinématique.

La seconde rotation instantanée, qui se fait autour de l'axe l , s'écrit :

(46) $\Omega_2 = \lambda^{-2}\varepsilon^{-2}(e\wedge\dot{e}\wedge l)\,l = \lambda^{-2}\varepsilon^{-2}\det(e,\dot{e},l)\,L$

que nous pouvons mettre sous une forme plus intéressante en remplaçant $\dot{e}$ par sa valeur (44) . Je fais grâce au lecteur du détail du calcul :

7. Je m'exprime prudemment sur ce sujet. Luc Duriez [3] note que le plan osculateur des astronomes n'est pas le même que celui des mathématiciens : le premier contient les vecteurs r et v , le second les vecteurs v et $\dot{v}$. Il n' y a coïncidence que si l'on travaille dans un même plan, ce qui en astronomie n'est pas réaliste.

$$(47) \qquad \Omega_2 = \lambda^{-2}\varepsilon^{-2}\alpha^{-1}[\det(e,r,l) f.v - \det(e,f,l) r.v - e.f\, l^2]\, L$$

On note que Ω_2 s'annule si f est perpendiculaire au plan de l'orbite, ce qui est logique. En revanche Ω_1 s'annule si f est parallèle au plan de l'orbite.

Pou avoir une vue complète des effets de la perturbation il nous reste à calculer le mouvement radial, en particulier pour l et e . Le plus simple est de procéder comme suit :

$$(48) \qquad l = \lambda\,\hat{l} \qquad\qquad \dot{l} = \dot{\lambda}\,\hat{l} + \lambda\,\dot{\hat{l}} \qquad\qquad l.\dot{l} = \lambda\,\dot{\lambda}$$

$$(49) \qquad \dot{\lambda} = \lambda^{-1}[-i(r\wedge f)].l = -\lambda^{-1} i(r\wedge f\wedge l) = \lambda^{-1}\det(r,f,l)$$

De même :

$$(50) \qquad e = \varepsilon\,\hat{e} \qquad\qquad \dot{e} = \dot{\varepsilon}\,\hat{e} + \varepsilon\,\dot{\hat{e}} \qquad\qquad e.\dot{e} = \varepsilon\,\dot{\varepsilon}$$

$$(51) \qquad \dot{\varepsilon} = \alpha^{-1}\varepsilon^{-1} e.(2v.fr - f.rv - r.vf)$$

On note que la variation radiale est nulle, pour l et pour e, si f est perpendiculaire au plan de l'orbite. Donc si f est dans cette position seul existe l'effet de la rotation instantanée Ω_1 .

Les perturbations dites séculaires.

Lorsque l'on examine qualitativement la perturbation que Jupiter peut exercer sur l'orbite terrestre, on est immédiatemement conscient du fait qu'il doit y avoir d'importantes compensations, sous forme de fluctuations, des effets ainsi obtenus. Jupiter tirera une fois à hue et une fois à dia ... S'agissant de fluctuations très petites on conçoit que l'on puisse être amené à les négliger à court terme, et se contenter d'en faire la moyenne sur une période plus ou moins longue (au moins une orbite complète).

Ce type d'analyse a évidemment donné lieu à d'innombrables et très précis calculs pratiques.

Nous n'y entrerons pas, encore que l'algèbre géométrique puisse faciliter la préparation de certains calculs numériques.

La correction du repère solaire.

Elle peut être traitée comme une perturbation, ce qui permet de garder le Soleil comme origine. On écrit simplement les équations suivantes, en appelant r_0 et $(r_0 + r_1)$ les rayons vecteurs du Soleil et de la Terre (par rapport à un point galiléen quelconque) :

$$(52) \qquad (\ddot{r}_0 + \ddot{r}_1) = -\alpha_0\, r_1\, \rho_1^{-3} \qquad\qquad \alpha_0 = \mathcal{G}\mu_0$$

$$(53) \qquad \ddot{r}_0 = \alpha_1\, r_1\, \rho_1^{-3} \qquad\qquad \alpha_1 = \mathcal{G}\mu_1$$

soit pour la Terre :

$$(54) \qquad \ddot{r}_1 = -(\alpha_0 + \alpha_1)\, r_1\, \rho_1^{-3} \qquad\qquad f = -\alpha_1\, r_1\, \rho_1^{-3}$$

La force f représente moins d'un trois cent millième de l'accélération de la Terre dans un repère ayant le soleil pour origine.

Quelques réflexions en guise de conclusion.

Lorsque l'on réécrit des sujets de physique traditionnels avec la GA on fait toujours le même genre de constatations. Dans les exposés classiques le calcul tensoriel a fini par s'imposer au détriment des méthodes plus synthétiques que le calcul vectoriel de Gibbs aurait dû permettre de mettre en oeuvre. Ce dernier est parfois un outil de présentation des résultats, mais pas vraiment un outil d'étude. Il en va tout autrement avec la GA qui peut être à la fois l'outil de travail du chercheur, pas obligatoirement exclusif, et celui qui permet la présentation la plus éclairante des résultats obtenus.

Mon expérience encore modeste dans ce domaine me conduit à penser que le principal avantage de la GA réside en la propriété d'associativité (du produit géométrique et du produit extérieur), et aussi dans le fait que ses divers éléments possèdent en général un inverse, toutes propriétés que ne possède pas la mal-nommée algèbre de Gibbs.

Et je ne peux que redire mon étonnement, je dirai même mon indignation, devant le peu d'intérêt – en-dehors de quelques cercles très spécialisés dans des applications géométriques informatisées – que la communauté physicienne et mathématicienne appliquée accorde à l'algèbre géométrique. C'est véritablement une mauvaise action commise envers les étudiants d'aujourd'hui que de ne pas leur donner même la moindre information sur l'existence de cet outil si efficace et si stimulant. Qu'ensuite la mise en oeuvre d'un enseignement dans ce domaine soit une tâche pas vraiment aisée, c'est un autre problème, qui devrait pouvoir recevoir des solutions pragmatiques. Pour peu que l'on veuille bien s'y intéresser ....

G.Ringeisen

Décembre 2008

[1] Geometric Algebra for Physicists – Doran, Lasenby – Cambridge University Press

(voir aussi page internet)

[2] New Foundations for Classical Mechanics – David Hestenes – Kluwer

[3] Luc Duriez http://ufr-math.univ-lille1.fr//Astro/index.html