Quaternions, rotors, spineurs, vus en algèbre géométrique.

Je rassemble ici quelques réflexions mi-scientifiques, mi-historiques qui me sont venues au fil des mois pendant que j'étudiais l'algèbre géométrique de David Hestenes. Je dis bien de Hestenes, car il y a aujourd'hui me semble-t-il quelques chapelles qui essaient de minimiser son apport, voire même de l'oublier. Je n'ai pour ma part pas la moindre intention de polémiquer à ce sujet, mais il m'appartient de tenir aussi honnêtement que possible mon rôle de chroniqueur scientifique. Je suis évidemment prêt à recueillir les avis de toute personne qui s'estimerait mieux informée que moi.

Parlons d'abord des quaternions. Il faut prendre garde au fait que ce terme est utilisé aujourd'hui à la fois par des quaternionistes qui travaillent dans la continuité de l'oeuvre initiale de Hamilton, et par les adeptes de la GA qui l'utilisent – au risque de créer des confusions – pour qualifier ainsi des rotors ou des spineurs. Pour dissiper toute ambiguïté nous appellerons les uns quaternions H, les autres quaternions GA.

Hamilton cherchait la généralisation à $\mathbb{R}^3$ des nombres complexes avec notamment l'objectif de construire un opérateur de rotation *one-sided* tel que $y = \mathfrak{R}x$ ou $y = x\mathfrak{R}$. Il lui a fallu des années pour comprendre qu'il ne pouvait obtenir qu'un opérateur *two-sided* tel que $y = \mathfrak{R}^\star x \mathfrak{R}$. D'autre part, deuxième déconvenue, l'opérateur en question que Hamilton appelait *vecteur* ne pouvait être caractérisé par seulement trois paramètres, mais nécessitait l'introduction d'un quatrième nombre scalaire. Hamilton a été conduit à définir la partie vectorielle $\boldsymbol{q}$ par rapport à un repère i, j, k satisfaisant aux fameuses relations :

(1) $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

(2) $$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

donc le quaternion complet s'écrit :

(3) $$q = \alpha + \boldsymbol{q} = \alpha + \beta i + \gamma j + \lambda k$$

On appelle aussi $\boldsymbol{q}$ partie imaginaire de q , ou encore quaternion pur.

A partir de là le ver était dans le fruit, car par exemple pour les rotations, des quaternions purs, éléments d'un espace de signature $(-1, -1, -1)$, étaient appliqués à de vrais vecteurs éléments d'un espace réel $\mathbb{R}^3$, mais transposés en quaternions purs. Ces difficultés d'interprétation des calculs ont sans doute contribué au relatif échec des quaternions, qui n'ont réussi à s'imposer que dans des domaines très spécialisés. Les physiciens ont choisi de travailler avec le calcul vectoriel, plus simple, de Gibbs. A noter que ce dernier comporte aussi un élément très étrange, à savoir un *vecteur* dont la « longueur » se mesure en unités de surface ! Il a fallu attendre l'introduction des tenseurs pour retrouver la rationalité.

Les choses auraient pu s'éclairer lorsque Grassmann et Clifford ont inventé à trente ans d'intervalle l'un le *produit extérieur*, l'autre le *produit géométrique* et une esquisse d'algèbre géométrique. Mais ils étaient trop en avance sur leur temps et Clifford, hélas, est mort très jeune.

Peu à peu l'algèbre de Clifford a été prise en charge par des algébristes théoriciens, qui en ont savamment développé les structures, sans souci prioritaire d'application.[1] De manière indépendante les physiciens (Pauli, Dirac) l'ont réinventée lorsqu'ils en ont éprouvé le besoin (spin de l'électron, équation relativiste de l'atome d'hydrogène), sans souci d'analyse théorique. C'est ainsi en particulier que la notion de *spineur*, difficile à expliquer et à comprendre[2], a été

1. Que les algébristes ne voient là aucune malveillance à leur égard. Leurs inclinations naturelles les ont amenés en bonne logique à développer un corpus théorique abstrait très étoffé, qui malheureusement se révèle dissuasif et de peu d'intérêt pour des praticiens, ingénieurs ou physiciens. Donc les applications concrètes n'ont pas suivi et les algèbres de Clifford sont restés au stade de spécialité théorique. C'est du moins la vision, peut-être trop partielle que j'ai de la situation. Je recommande vivement la lecture des textes de Hestenes parlant de l'enseignement des mathématiques.

2. Disons d'une manière caricaturale, en guise de définition négative, qu'un spineur est un être mathématique qui dans une transformation active ou passive ne se comporte ni comme un vecteur ni comme une matrice !

inventée indépendamment par les mathématiciens (Elie Cartan) et les physiciens (Pauli). Cependant les uns et les autres se sont spontanément entendus sur une chose, à savoir la représentation des algèbres de Clifford par des matrices à éléments complexes. Sans doute était-ce là le résultat de l'expérience concrète que l'on avait des matrices en tant qu'algèbres associatives mais non commutatives.

A partir du début des années 60 un jeune physicien et mathématicien américain, David Hestenes, s'écartant résolument du chemin tracé, a réinventé l'algèbre géométrique oubliée de Clifford.

Ce qui est très intéressant à observer c'est que sa démarche n'a pas pour origine une analyse de géométrie élémentaire, comme Clifford aurait sans doute pu la pratiquer. Au contraire elle est partie d'un examen critique approfondi d'un sujet fort difficile, celui précisément du rôle joué en mécanique quantique par les matrices σ de Pauli et γ de Dirac. Autrement dit Hestenes n'est pas allé du simple au compliqué, par une démarche progressive. Il a d'emblée eu une idée brillante modifiant profondément la façon d'aborder un thème majeur situé au coeur d'une théorie physique difficile.

Après la lecture de quelques notes de cours du mathématicien Marcel Riesz sur « Les nombres de Clifford et les spineurs », il a compris que les matrices de Dirac pouvaient être considérées comme de simples vecteurs, et que ceci conférait à l'algèbre dite de Dirac une signification géométrique qui n'avait plus rien à voir avec le spin. Ainsi dès le début il jetait un pavé dans la mare de l'interprétation de la mécanique quantique, ce qui lui a valu ensuite bien des réactions hostiles.

A partir de là s'est produit un curieux phénomène, que peut-être Hestenes lui-même n'avait pas complètement prévu : l'étroite spécialité algébrique « calcul de Clifford » a révélé un potentiel considérable en tant que nouvel outil mathématique, universel dixit Hestenes, en tout cas capable de rivaliser avec le calcul tensoriel ou toute autre méthode. Ainsi ont pu être développés des méthodes algébriques, des outils de géométrie projective, de géométrie en modèle conforme, un « geometric calculus », etc ...

Pour en revenir aux rotors, il s'agit dans ce nouveau cadre de la somme unitaire d'un scalaire et d'un bivecteur, constituant les outils adéquats pour les rotations, sous la forme $\tilde{R}\,a\,R$, avec $\tilde{R}R=1$. Si u et v sont deux vecteurs unitaires d'angle $\theta/2$ on peut construire le rotor :

(4) $$R = u\,v = u.v + u\wedge v = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,u\wedge v\,/|u\wedge v|$$

qui permet de réaliser la rotation d'angle θ .

En rapprochant cette expression de la formule (3) on voit bien que les quaternions H s'intègrent dans la GA à condition de comprendre que les vecteurs de Hamilton sont en réalité des bivecteurs.

En langage quaternions les *vecteurs* i, j, k jouent en quelque sorte le rôle de « nombres » imaginaires. A contrario l'algèbre géométrique ne fait intervenir que des scalaires réels. Cet aspect de la théorie est particulièrement important, car il conduit à réécrire les équations de la mécanique quantique sans faire intervenir l'imaginaire i , qui est remplacé par un bivecteur. Une grande partie de la littérature interprétative tournant autour du rôle soi-disant inéluctable joué par i dans cette théorie, et devenant donc obsolète, on conçoit qu'il s'agisse d'un sujet sensible.

Une des conséquences heureuses de cette transposition est le fait que la notion traditionnelle de *spineur* est remplacée par un être mathématique simple, de même nom, qui n'est autre chose qu'un rotor non unitaire, c'est à dire un rotor multiplié par un scalaire. L'opération $\tilde{\psi}a\psi$ réalise une rotation suivie d'une dilatation. Dans le cas de l'équation de Dirac la situation est un peu plus compliquée : le spineur est alors un élément pair de l'algèbre de Clifford de l'espace de Minkowski, c'est à dire un biquaternion GA, somme d'un scalaire, d'un bivecteur et d'un pseudo scalaire. Il est clair que tout ceci entraîne de profondes modifications d'interprétation de la notion de spin. Celui-ci, bien que n'ayant pas d'analogue classique, rentre dans le rang en retrouvant sa place dans l'espace ordinaire, sans qu'il soit besoin de faire appel à un mystérieux espace abstrait de spin. Autre cause potentielle de conflit, cette fois-ci avec les physiciens quantiques ...

On est bien loin de la géométrie élémentaire et de la simple couche de vernis passée sur des choses connues, comme le prétendent certains détracteurs de Hestenes.

G.Ringeisen

Juillet 2008