Repères en rotation vus en GA.

La question de la représentation des mouvements dans des repères en rotation par rapport à un repère inertiel figure dans tous les ouvrages classiques de mécanique rationnelle. Elle est en général traitée par le biais de méthodes tensorielles ou matricielles mettant en évidence quelques propriétés de base (tenseurs antisymétriques, *vecteurs* de rotation instantanée, etc ...), puis traduite en calcul vectoriel de Gibbs.

Parmi ces nombreux ouvrages l'un d'entre eux se distingue particulièrement, celui de V.I. Arnol'd [1], qui aborde la mécanique rationnelle d'une manière très moderne par la géométrie des variétés différentielles. Cette approche est certainement très efficace pour le développement de la théorie sous ses aspects les plus avancés, mais nécessite un effort d'abstraction important de la part de l'étudiant ou de l'utilisateur formé aux méthodes plus traditionnelles.

En GA je ne connais qu'un seul ouvrage traitant le sujet des repères en rotation de manière détaillée, celui de David Hestenes [2]. En reprenant récemment l'étude des trajectoires dans des repères en mouvement relatif j'y ai trouvé une parenté, à laquelle je ne m'attendais pas, avec l'approche arnol'dienne. J'avoue avoir été perturbé par cela, car si Arnol'd distingue clairement des espaces vectoriels abstraits distincts pour caractériser les vecteurs positions, il n'en va pas de même pour Hestenes, qui donne deux noms différents $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x'}$ pour caractériser le même point physique. Les deux vecteurs ainsi dénommés se distinguent par le fait qu'ils sont supposés être repérés par référence à deux trièdres de base en mouvement relatif. Cette façon de faire me paraît être quelque peu contradictoire avec un principe de base de la GA.

De ce fait j'ai eu l'impression que l'étudiant en GA risquait de se trouver devant une inutile difficulté de compréhension, alors qu'il est facile de procéder autrement. C'est l'objet de la présente note.

Rappel sur les rotations.

Une rotation dépendant du temps se caractérise par une relation spinorielle :

(1) $\quad x(t)=\tilde{R}(t)x(0)R(t) \qquad \text{avec} \qquad \tilde{R}R=1$

En différentiant ces relations on définit aisément :

(2) $\quad \dot{x}=x\,.\,\Omega \qquad$ où Ω est un bivecteur,

avec :

(3) $\quad \Omega=2\,\tilde{R}\,\dot{R} \qquad \dot{R}=\frac{1}{2}\,R\Omega \qquad \dot{\tilde{R}}=-\frac{1}{2}\,\Omega\,\tilde{R}$

(4) $\quad \Omega=I\omega \qquad$ où ω est l'usuel vecteur *vitesse instantanée de rotation*.

Le remplacement de la classique équation $\dot{x}=\omega\times x$ par la relation (2) n'est pas un simple détail algébrique. En substituant au faux vecteur ω le vrai bivecteur Ω et au produit vectoriel $\times$ l'opérateur de projection-rotation sur le plan (Ω), on réintroduit une notion géométrique simple en lieu et place de l'incongrue règle des trois doigts. La relation (2) signifie que l'on projette le vecteur x sur le plan (Ω), puis que l'on tourne cet élément d'un quart de tour *dans le même sens* que Ω et que l'on multiplie le résultat par $|\Omega|$. On note avec satisfaction que l'on n'a pas besoin de s'infliger un torticolis intellectuel pour savoir si l'on doit regarder le plan par au-dessus ou par en-dessous ...! Tourner dans le même sens veut dire, si $\Omega=\,|\lambda|\;u\wedge v=|\lambda\,|\,uv$, suivre le plus court chemin de rotation allant de u vers v. On notera que cette règle de bon sens est indépendante du nombre de dimensions de l'espace. De ce fait on peut immédiatement écrire :

(5) $\quad -(x\,.\,\Omega)\,.\,\Omega=|\Omega|^2\,P_\Omega(x) \qquad$ (force centrifuge – center fleeing force)

sans invoquer aucune formule d'algèbre !

Formulation en repère non inertiel.

Nous considérons un repère inertiel défini par les vecteurs de base e_i , et un repère défini par les vecteurs f_j en rotation par rapport aux précédents. On a :

(6) $\quad f_j = \tilde{R}\, e_j\, R \qquad\qquad \dot{f}_j = f_j\,.\Omega$

(7) $\quad x = x^i\, e_i = \xi^j\, f_j$

En appelant v_a , v_r , v_e respectivement les vitesses absolues, relatives, d'entraînement, on obtient :

(8) $\quad v_a = \dot{x} = \dot{x}^i\, e_i = \dot{\xi}^j\, f_j + \xi^j\, \dot{f}_j = \dot{\xi}^j\, f_j + \xi^j\, f_j\,.\Omega = \dot{\xi}^j\, f_j + x.\Omega = v_r + v_e$

De même pour les accélérations :

(9) $\quad \gamma_a = \ddot{x} = \ddot{x}^i\, e_i = \ddot{\xi}^j f_j + 2\dot{\xi}^j \dot{f}_j + \xi^j \dot{f}^j.\Omega + x.\dot{\Omega} = \ddot{\xi}^j f_j + 2\dot{\xi}^j f_j.\Omega + \xi^j (f_j\,.\Omega).\Omega + x.\dot{\Omega}$

$\qquad\qquad = \gamma_r + 2v_r.\Omega + (x.\Omega).\Omega + x.\dot{\Omega}$

Si donc le point matériel est soumis à une force F on a :

(10) $\quad \gamma_r = \frac{F}{m} - 2v_r.\Omega - (x.\Omega).\Omega - x.\dot{\Omega}$

où l'on voit apparaître les forces fictives de Coriolis $(-2v_r.\Omega)$ et centrifuges $[-v_e.\Omega]$ et la force non nommée $(-x.\dot{\Omega})$.

Comme pour la force centrifuge la détermination de l'orientation de la force de Coriolis est très facile en GA : il suffit de dessiner sur une feuille de papier, sous forme d'un petit cercle, la circulation de $(-\Omega)$ vue d'en haut au point de latitude étudié, d'y reporter la direction de la projection de v_r, puis de dévier celle-ci dans le sens de rotation de $(-\Omega)$. C'est ainsi que l'on voit immédiatement que dans l'hémisphère Nord un point matériel se déplaçant dans un repère terrestre vers le Nord est dévié vers l'Est[1]. Essayez de déterminer cela en moins de 5 minutes avec la règle usuelle ...

Il est important de détailler aussi ces équations dans le cas – par exemple pour le pendule de Foucault – où l'on serait amené à utiliser un repère en rotation dont le point origine serait animé d'un mouvement imposé (une translation donc, fonction du temps). Soit $x_0(t)$ le vecteur caractérisant ce point origine variable. On est amené à écrire les équations suivantes :

(11) $\quad x = (x - x_0) + x_0 = x^i e_i = (\xi^j - \xi_0^j) f_j + x_0$

(12) $\quad \dot{x} = v_a = (\dot{\xi} - \dot{\xi}_0^j) f_j + (\xi^j - \xi_0^j) f_j.\Omega + \dot{x}_0 = v_r + (x - x_0).\Omega + \dot{x}_0$

(13) $\quad v_r = (\dot{\xi} - \dot{\xi}_0^j) f_j \qquad\qquad \gamma_r = (\ddot{\xi}^j - \ddot{\xi}_0) f_j$

(14) $\quad \ddot{x} = \gamma_a = (\ddot{\xi}^j - \ddot{\xi}_0) f_j + 2(\dot{\xi}^j - \dot{\xi}_0) f_j.\Omega + (\xi^j - \xi_0^j)(f_j\,.\Omega).\Omega + (x - x_0).\dot{\Omega} + \ddot{x}_0$

$\qquad\qquad = \gamma_r + 2v_r.\Omega + [(x - x_0).\Omega].\Omega + (x - x_0).\dot{\Omega} + \ddot{x}_0$

(15) $\quad \gamma_r = \frac{F}{m} - 2v_r.\Omega - [(x - x_0).\Omega].\Omega - (x - x_0).\dot{\Omega} - \ddot{x}_0$

On peut noter que si le mouvement du point x_0 est uniquement imposé par la même rotation instantanée que celle fixant l'orientation du repère mobile on retrouve en bonne logique une force centrifuge égale à $-[(x - x_0).\Omega].\Omega - \ddot{x}_0 = -(x\,.\Omega).\Omega$.

David Hestenes signale qu'une équation telle que (12) figure dans tous les ouvrages d'enseignement, mais que l'on oublie de préciser qu'elle n'est valable qu'à un instant donné, et n'est donc ni intégrable ni différentiable pour trouver l'équation (15) des accélérations. Il ne faut en effet pas oublier que le repère mobile est entièrement caractérisé par la donnée de $\Omega(t)$ – équations (3) – et de $x_0(t)$. Il faut alors mener les calculs différentiels en exprimant tous les éléments vectoriels sous une forme explicite en termes de coordonnées du type $\xi^j\, f_j$, où les f_j sont les vecteurs de base du repère mobile. C'est ainsi que le terme en $\dot{\Omega}$, en général négligeable, devra être calculé en exprimant Ω de manière explicite[2] par $I\,\omega^j\, f_j$. Ceci fait les équations (12) et (15) peuvent être traduites en l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées, en multipliant scalairement soit par les e^i, soit par les f^j .

1. Il s'agit de déviation instantanée ; pour des trajectoires entières voir Hestenes [1]

2. On obtient, en notant bien que les ω^j sont les coordonnées de ω dans le repère mobile, $\dot{\Omega} = I\,\dot{\omega}^j\, f_j$.

Conclusion.

J'invite le lecteur à comparer les développements ci-dessus à ceux figurant dans les cours classiques sur internet. Pour être honnête il faudrait bien entendu étoffer un peu plus le rappel sur les rotations, mais néanmoins le rapport n'est pas loin de celui, 1/10 , cité par David Hestenes pour des travaux de physique quantique.

Georges Ringeisen

Juillet 2011

[1] Mathematical methods of classical mechanics. V.I.Arnol'd

[2] New foundations for classical mechanics. David Hestenes