Exercices sur les rotations en GA.

Remarques préliminaires.

L'algèbre géométrique (GA) est évidemment l'outil mathématique idéal pour traiter les rotations. On ne peut qu'être surpris de constater que ce fait ne soit pas universellement reconnu, et qu'aujourd'hui par exemple on continue à utiliser dans certains domaines spécialisés (programmation de jeux, robotique, espace, etc ...) des calculs par quaternions beaucoup plus difficiles à manipuler et à interpréter. De plus la littérature sur les rotations que l'on trouve sur Internet est un cas typique d'infection par ce que David Hestenes appelle « coordinitis virus ».

Considérons par exemple dans $\mathbb{R}^3$ un vecteur que nous souhaitons examiner dans divers repères, ou transformer par rotation. Nous appelons R le rotor unitaire, somme d'un scalaire α et d'un bivecteur A .

Dans un premier temps nous passons d'un repère orthonormé e_k dit *ancien* à un repère f_k dit *nouveau* par la rotation d'axe a et d'angle θ :

(1) $$f_k = \tilde{R}\, e_k\, R \qquad \text{avec} \qquad R = \alpha + A = \alpha + i\, a \qquad \tilde{R} = \alpha - A = \alpha - i\, a$$

$$R\tilde{R} = 1 \qquad \alpha = \cos(\theta/2) \qquad a = \sin(\theta/2)\, \hat{a} \qquad \hat{a}^2 = 1$$

Appelons x un vecteur de coordonnées x^k dans l'ancien repère et ξ^k dans le nouveau repère. Nous avons donc [1] :

(2) $$x = x^k\, e_k = \xi^k\, f_k$$

(3) $$x^k = e^k .\, x \qquad \xi^k = f^k .\, x = (\tilde{R}\, e^k R) .\, x = <\tilde{R}\, e^k R x> = <R x \tilde{R}\, e^k> = (R x \tilde{R}\,) .\, e^k$$

(4) $$\xi = \xi^k\, e_k = (R x \tilde{R}\,) .\, e^k\, e_k = R x \tilde{R}$$

Le vecteur ξ est obtenu en faisant subir au vecteur x une rotation inverse de celle pratiquée sur le repère ancien. On trouve donc sans effort la double interprétation des coordonnées ξ^k : elles représentent soit la projection de x sur le nouveau repère, soit la projection de ξ sur l'ancien repère.

Dans l'exposé théorique il n'est pas besoin d'aller plus loin. Les formules (3) contiennent toute l'information nécessaire pour calculer les matrices numériques nécessaires dans les applications pratiques.

Composition des rotations en $\mathbb{R}^3$.

Dans les nombreux textes, plus ou moins savants, existant sur le sujet on ne trouve jamais - mais peut-être ai-je mal cherché - une démonstration complète ! C'est à dire le fait que les axes des diverses rotations doivent concourir en un même point est admis comme une vérité d'évidence. Or - et j'invite le lecteur à s'y exercer - c'est loin d'être aussi clair. Une démonstration purement géométrique, basée sur la notion de points fixes, est possible, mais ne suffit pas pour donner la position de l'axe de la rotation produit. En revanche l'algèbre géométrique apporte une solution complète, simple et élégante, qui illustre bien les avantages de cet outil.

Considérons donc trois axes de rotation définis par trois points quelconques a_1, a_2, a_3, trois vecteurs unitaires u_1, u_2, u_3, trois angles φ_1, φ_2, φ_3, la troisième rotation étant supposée être le produit des deux premières. Si x est un point (vecteur) quelconque soumis à ces rotations, nous devrions avoir la relation suivante :

(5) $$\tilde{R}_2\{\tilde{R}_1(x - a_1)R_1 + a_1 - a_2\}R_2 + a_2 = \tilde{R}_3(x - a_3)R_3 + a_3$$

1. Nous employons ici la notion de vecteur réciproque e^k (le vecteur covariant du calcul tensoriel), qui coïncide en orthonormé avec le vecteur e_k , ainsi que la propriété de permutation pour le calcul de la partie scalaire d'un produit géométrique. Bien entendu $e^k . e_j = \delta^k_j$.

Cette unique équation contient et définit tous les éléments que nous cherchons :

– la condition necessaire d'existence,

– le rotor R_3 ,

– la valeur (direction) du vecteur u_3 et d'un point a_3 de l'axe de rotation résultant,

– la valeur de l'angle φ_3 .

Qu'il en soit ainsi permet de mesurer toute la puissance de l'outil GA.

Géométriquement il est évident que l'on peut faire glisser les points a_1, a_2, a_3 librement sur leurs axes respectifs. Algébriquement on vérifie qu'il en est bien ainsi, car :

$$(a+\lambda u)-\tilde{R}(a+\lambda u)R=(a-\tilde{R}\,a\,R) \qquad \text{si} \qquad R=\cos\tfrac{\varphi}{2}+i\,u\,\sin\tfrac{\varphi}{2}$$

Le fait que l'équation (5) doive être vérifiée pour un x quelconque implique :

(6) $$R_3=R_1R_2 \qquad \tilde{R}_3=\tilde{R}_2\tilde{R}_1$$

et donc en développant :

(7) $$\cos\tfrac{\varphi_3}{2}=\cos\tfrac{\varphi_1}{2}\,\cos\tfrac{\varphi_2}{2}-u_1\,.\,u_2\,\sin\tfrac{\varphi_1}{2}\,\sin\tfrac{\varphi_2}{2}$$

(8) $$i\,u_3\sin\tfrac{\varphi_3}{2}=i\,u_1\sin\tfrac{\varphi_1}{2}\,\cos\tfrac{\varphi_2}{2}+i\,u_2\sin\tfrac{\varphi_2}{2}\,\cos\tfrac{\varphi_1}{2}-u_1\wedge u_2\,\sin\tfrac{\varphi_1}{2}\,\sin\tfrac{\varphi_2}{2}$$

Compte tenu de la relation (6) la relation (5) devient :

(9) $$(a_3-a_1)-\tilde{R}_3(a_3-a_1)R_3=(a_2-a_1)-\tilde{R}_2(a_2-a_1)R_2$$

En cherchant à résoudre cette équation en (a_3-a_1) nous verrons apparaître une condition d'existence. Après multiplication à gauche par R_3 et en tenant compte de (6) l'équation (9) se transforme comme suit :

$$R_3(a_3-a_1)-(a_3-a_1)R_3=R_1\{R_2(a_2-a_1)-(a_2-a_1)R_2\}$$

$$i\,u_3(a_3-a_1)-(a_3-a_1)i\,u_3=R_1\{i\,u_2(a_2-a_1)-(a_2-a_1)i\,u_2\}$$

(10) $$u_3\wedge(a_3-a_1)=R_1\,u_2\wedge(a_2-a_1)$$

Le membre de droite de cette équation contient un terme scalaire qui doit être nul puisque le membre de gauche est un bivecteur. Donc :

$$<u_3\wedge(a_3-a_1)>=0=<R_1\,u_2\wedge(a_2-a_1)>=(i\,u_1).\{u_2\wedge(a_2-a_1)\}$$

(11) $$0=u_1\wedge u_2\wedge(a_2-a_1)$$

Cette relation signifie que (a_2-a_1), u_2 , u_1 doivent être coplanaires ; donc pour que le problème posé soit soluble les deux axes de rotation doivent être concourants. Alors a_1 et a_2 peuvent être ramenés au point d'origine commun et l'on a aussi $a_3=0$. Donc les trois axes passent par un même point. Alors les équations (7) et (8) donnent la solution complète du problème. Si l'on a besoin pour des valeurs données de a_1 , a_2 de calculer a_3 on obtient facilement à partir de (10) :

$$u_3\wedge(a_3-a_1)=u_3\wedge(a_3-a_1)_\perp=u_3\,(a_3-a_1)_\perp=R_1\,u_2\wedge(a_2-a_1)$$

(12) $$(a_3-a_1)_\perp=u_3\,R_1\,u_2\wedge(a_2-a_1)$$

(13) $$u_3\,(a_3-a_1)_\parallel=0$$

(14) $$a_3-a_1=u_3\,\{R_1\,u_2\wedge(a_2-a_1)+\lambda\}$$

Trouver les paramètres de la rotation lorsque deux couples de vecteurs sont connus.

L'idée de ce calcul, utile pour l'orientation des satellites, m'a été donnée par une note de la bibliothèque « Marmottes » du CNES. Il m'a semblé que ce calcul pouvait se faire de manière beaucoup plus simple et plus sûre en GA, plutôt qu'avec les quaternions.

Comment donc déterminer la rotation à partir de la connaissance de deux couples de vecteurs, (x, ξ) et (y, η) ?

Nous écrivons successivement, en exploitant le fait que $(\eta - y)$ et $(\xi - x)$ sont parallèles au plan de rotation défini par le bivecteur A:

(10) $$(\eta - y) \wedge (\xi - x) = (\eta_{\|} - y_{\|}) \wedge (\xi_{\|} - x_{\|}) = (R y_{\|} \tilde{R} - y_{\|}) \wedge (R x_{\|} \tilde{R} - x_{\|})$$
$$= \{y_{\|}(\tilde{R}^2 - 1)\} \wedge \{x_{\|}(\tilde{R}^2 - 1)\}$$
$$= 1/2\{y_{\|}(\tilde{R}^2 - 1) x_{\|}(\tilde{R}^2 - 1) - x_{\|}(\tilde{R}^2 - 1) y_{\|}(\tilde{R}^2 - 1)\}$$
$$= 1/2(2 - R^2 - \tilde{R}^2)(y_{\|} x_{\|} - x_{\|} y_{\|}) = 4a^2 x_{\|} \wedge y_{\|}$$
$$= 4a(a \wedge x_{\|} \wedge y_{\|}) = 4a(a \wedge x \wedge y) = 4A \det\{a, x, y\}$$

(11) $$\alpha^2 = 1 - a^2 \qquad \text{et} \qquad R = \alpha + i\,a$$

En posant :

$$-B = (\eta - y) \wedge (\xi - x)$$

et en notant que :

$$-B/|B| = A/|A| = i\,a/|a|$$

on obtient :

$$-B = 4iB\{(iB) \wedge x \wedge y\}|a|^2/|B|^2$$

(12) $$1 = 4B.(x \wedge y)|a|^2/|B|^2$$

Donc a^2 , α^2 , et α , a, A et R sont entièrement déterminés.

Composition des rotations dans le plan.

Avec les mêmes notations nous avons toujours les relations :

(13) $$\tilde{R}_2\{\tilde{R}_1(x - a_1)R_1 + a_1 - a_2\}R_2 + a_2 = \tilde{R}_3(x - a_3)R_3 + a_3$$

(14) $$R_3 = R_1 R_2 \qquad \tilde{R}_3 = \tilde{R}_2 \tilde{R}_1$$

(15) $$(a_3 - a_1) - \tilde{R}_3(a_3 - a_1)R_3 = (a_2 - a_1) - \tilde{R}_2(a_2 - a_1)R_2$$

mais les rotors sont tous de la forme :

(16) $$R_k = \alpha_k + i\beta_k \hat{u} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_k{}^2 + \beta_k{}^2 = 1 \qquad \hat{u}^2 = 1$$

où i, pseudoscalaire du plan, anticommute avec les vecteurs. On obtient donc :

(17) $$a_3(1 - R_1{}^2 R_2{}^2) = a_1 R_2{}^2(1 - R_1{}^2) + a_2(1 - R_2{}^2)$$

(18) $$a_3 = (1 - R_1{}^2 R_2{}^2)^{\perp 1}\{a_1 R_2{}^2(1 - R_1{}^2) + a_2(1 - R_2{}^2)\}$$

(19) $$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad \text{en développant (14).}$$

Il n'y a pas de condition d'existence puisque les trois axes de rotation sont parallèles.

Si la deuxième rotation tend vers une translation de vecteur h , alors on peut écrire :

(20) $$\lim R_2{}^2 = 1 \qquad \lim a_2(1 - R_2{}^2) = -h$$

(21) $$a_3 = (1 - R_1{}^2)^{\perp 1}\{a_1(1 - R_1{}^2) - h\}$$

démontrant ainsi que la composition d'une rotation et d'une translation donne une rotation d'angle égal à la rotation initiale.

G.Ringeisen

Mars 2007