Calcul en GA de la déviation d'un proton par un noyau atomique.

(Rutherford scattering).

La présente étude est inspirée d'un exercice sur une expérience fondamentale de Rutherford, traité par Feynman dans un cours de révision donné en 1961 dans le cadre de ses cours exceptionnels de 1ère année à Caltech. Il s'agit donc de suppléments, mis en forme par Michael Gottlieb et Ralph Leighton, au fameux « *Cours de Physique de Feynman.* [1]

Il s'agit d'étudier la déviation de protons (des rayons alpha dans le cas de Rutherford) passant au voisinage immédiat d'un noyau atomique de charge $Zq \quad (q > 0)$, à la distance la plus courte h . Feynman, par un raisonnement purement physique portant sur la durée d'action de la force répulsive au voisinage du noyau, montre que l'angle de déviation est inversement proportionnel à $|h|$ [1] . Il en déduit en première approximation sommaire la formule suivante pour les petits angles :

(1) $$\beta \simeq \frac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mv^2|h|}$$

Puis d'une manière pas très claire il ajoute qu'il faudrait cependant intégrer la force, ce qui ferait apparaître un facteur de 2,716 (?), et qu'en définitive le résultat serait exactement le double (?) de celui calculé par (1). [2]

La présentation faite par Feynman m'intriguait ; j'ai donc décidé de voir ce que cela pouvait donner en algèbre géométrique, en espérant établir rigoureusement le résultat donné par Feynman, y compris le facteur 2, et peut-être aussi généraliser le calcul pour les déviations importantes.

J'ai abordé cette question d'une manière naïve, car je n'avais que de très vagues souvenirs de ce sujet et lors de la première rédaction de ma note je n'avais pas internet à ma disposition. Ceci m'a permis en particulier de ne pas tomber tout de suite dans le piège des présentations asymptotiques en vigueur dans presque tous les documents que j'ai lus par la suite. Je m'efforce dans la présentation qui suit de respecter ma démarche initiale. Compte tenu de l'évidente difficulté du calcul intégral évoqué par Feynman j'ai évidemment cherché un moyen de procéder autrement.

Pour la suite de l'exposé il convient de se reporter au schéma *Scattering.jpg* figurant sur mon site . L'ensemble des calculs en GA repose sur l'idée suivante :

— Déterminer à partir des éléments de base, position initiale et vitesse du proton, le moment angulaire du proton puis le vecteur excentricité [3] de la trajectoire, ce qui donne en particulier l'axe principal de l'hyperbole ;

— positionner le point de mesure final (calculable) de manière symétrique par rapport à cet axe, et calculer l'angle (v_1, v_2) , égal par construction au double de l'angle (h, e) .

— constater que pour les faibles déviations la position de l'écran est quasi-fixe en un point symétrique du point initial, par rapport au vecteur h ;

— donner si nécessaire la formule permettant de placer l'écran pour les mesures de grands angles.

La facilité du calcul en GA repose sur la disponibilité immédiate du vecteur e , et plus généralement sur la souplesse du produit géométrique ; certes on peut tout adapter en algèbre de Gibbs, mais quel torticolis intellectuel pour suivre tous ces doubles produite vectoriels, et que de périphrases ; quant au calcul intégral évoqué par Feynman j'ai rapidement renoncé à l'approfondir.

1. Je prends mes notations.

2. Je soupçonne ici les auteurs de n'avoir pas parfaitement reproduit la pensée de Feynman.

3. Vecteur de Laplace. La norme de ce vecteur coïncide avec la notion géométrique scalaire d'excentricité, mais le véritable invariant au sens des symétries du système (théorême de Noether) est le vecteur e .

Enfin en ce qui concerne l'explication du facteur 2 , il me semble qu'il s'agit simplement d'une question de définition: la géométrie du système implique que l'angle de déviation (v_1, v_2) soit le double de l'angle apparent de déviation $(v_1, \overrightarrow{\mathrm{MN_1}})$. Pour cette raison aussi la position de l'écran ne peut pas a priori être quelconque.

Nous pouvons maintenant **passer au calcul** :

Charge du noyau $\quad Zq \quad (q>0)$

Force répulsive $\quad f = \frac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0} x r^{-3} = k x r^{-3} = k\hat{x} r^{-2} \qquad x = \hat{x}\, r \qquad k>0$

Rappels GA $\quad v = \dot{x} = \dot{\hat{x}}\, r + \hat{x}\, \dot{r}$

$$x \wedge \dot{x} = x \wedge \dot{\hat{x}}\, r = \hat{x} \wedge \dot{\hat{x}}\, r^2 = \hat{x}\, \dot{\hat{x}}\, r^2 = -\, \dot{\hat{x}}\, \hat{x}\, r^2$$

$$\hat{x} \,.\, \dot{\hat{x}} = 0 \qquad \text{car} \qquad d(\hat{x}^2) = 0$$

Masse du proton $\quad m$

On néglige dans tout ce qui suit le mouvement du noyau.

(2) $\quad m\gamma = m\,\ddot{x} = m\,\dot{v} = k x r^{-3} = k\,\hat{x}\, r^{-2}$

(3) $\quad L = m x \wedge \dot{x} = m\hat{x}\, \dot{\hat{x}}\, r^2 = -\, m\dot{\hat{x}}\, \hat{x}\, r^2$

(4) $\quad L\,\dot{v} = -\, k\, \dot{\hat{x}}$

L étant une constante du mouvement, on a donc :

(5) $\quad \frac{d}{dt}(Lv + k\,\hat{x}) = 0$

(6) $\quad Lv + k\,\hat{x} = ke$

Le vecteur d'excentricité e est donc une constante du mouvement. Le fait d'écrire ke dans (6) permet d'assurer que $|e|$ est un nombre sans dimension.

(7) $\quad e = \hat{x} + k^{-1} L v$

En particulier pour les conditions initiales on a :

(8) $\quad e = \hat{x}_1 + k^{-1} L v_1 = \hat{x}_1 + k^{-1} m\, x_1 \wedge v_1\, v_1$

Calculons $h = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$:

(9) $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{HM}}$

(10) $\quad h = x_1 - x_1.\hat{v}_1\, \hat{v}_1 = x_1 \wedge \hat{v}_1\, \hat{v}_1$

Précisons l'orientation de e :

(11) $\quad e = \hat{x}_1 + k^{-1} m\, x_1 \wedge v_1\, v_1 = \hat{x}_1 + k^{-1} m {v_1}^2\, h$

Donc e est orienté dans le sens $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.

L'angle que l'on mesure est $2\beta = (v_1, v_2)$ qui fait passer de v_1 à v_2 . On a aussi $\beta = (h, e)$.

Calcul de β :

(12) $\quad h \wedge e = h \wedge (\hat{x}_1 + k^{-1} m {v_1}^2\, h) = h \wedge \hat{x}_1 = (x_1 - x_1.\hat{v}_1\, \hat{v}_1) \wedge \hat{x}_1 = -\, x_1.\hat{v}_1\, \hat{v}_1 \wedge \hat{x}_1$

(13) $\quad |h \wedge e| = |h||e| \sin\beta$

(14) $\sin\beta = |x_1.\hat{v}_1||\,\hat{v}_1\wedge\hat{x}_1||h|^{-1}||e|^{-1}$

Or :

(15) $\left|x_1.\hat{v}_1\right| = ({r_1}^2 - h^2)^{1/2} = r_1\cos\alpha \simeq r_1$

L'approximation finale est toujours valable, indépendamment de β, car $h \ll r_1$.

(16) $\left|\hat{v}_1\wedge\hat{x}_1\right| = \sin\alpha = \left|h\right|{r_1}^{-1}$

(17) $\sin\beta = r_1\cos\alpha\left|h\right|{r_1}^{-1}\left|h\right|^{-1}\left|e\right|^{-1} = \frac{\cos\alpha}{|e|} \simeq \left|e\right|^{-1}$

Cette relation, vraie sur tout le domaine de variation, entre l'angle de déviation et la norme du vecteur de Laplace, est d'une étonnante simplicité. Je l'ai retrouvée dans un des documents internet, peu nombreux, que j'ai consultés, mais fondée sur les seuls éléments asymptotiques ($\cos\alpha = 1$). Il est commode de la transformer de la manière suivante :

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{|e\cos\beta|} = \frac{\cos\alpha}{e.\hat{h}}$$

$$e.\hat{h} = \hat{x}_1.\hat{h} + k^{-1}m{v_1}^2\left|h\right| = \sin\alpha + k^{-1}m{v_1}^2\left|h\right|$$

(18) $\mathrm{tg}\,\beta = \cos\alpha/[\sin\alpha + k^{-1}m{v_1}^2\,|\,h|] \simeq [\sin\alpha + k^{-1}m{v_1}^2\,|\,h|]^{-1}$

On a donc en toute généralité :

(19) $2\beta \simeq 2\,\mathrm{Arc\,tg}\{(\sin\alpha + k^{-1}m{v_1}^2\,|\,h|)^{-1}\}$

Cas des petits angles de déviation :

Pour que β soit petit il faut évidemment que $k^{-1}m{v_1}^2\,|\,h|$ soit grand devant $\cos\alpha \simeq 1$, donc que $|h|$ soit suffisamment grand. Alors $\sin\alpha$ est certainement négligeable devant $k^{-1}m{v_1}^2\,|\,h|$, et l'on peut écrire :

$$\mathrm{tg}\,\beta \simeq \beta \simeq k\,m^{-1}\,{v_1}^{-2}\left|h\right|^{-1}$$

(20) $2\beta \simeq \frac{2Zq^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{m{v_1}^2|h|}$

C'est le résultat donné par Feynman, ce qui fort heureusement est en accord avec nos formules (17) et (19).

Cas des grands angles :

Il faut alors conserver la relation (19). On peut cependant noter que $\sin\alpha$ reste vraisemblablement négligeable devant $k^{-1}m{v_1}^2\,|\,h|$, et certainement si l'on se réfère à un schéma asymptotique.

Positionnement des écrans :

$$\overrightarrow{\mathrm{MH}} = -\,x_1.\hat{v}_1\,\hat{v}_1 = r_1\cos\alpha\;\hat{v}_1 \qquad \text{(donnée de base)}$$

$$x_2 = x_1 - 2x_1\wedge\hat{e}\,\hat{e} = -\,x_1 + \hat{x}_1.\hat{e}\,\hat{e}$$

$$x_2\,.\,\hat{v}_1 = -\,x_1.\hat{v}_1 + \hat{x}_1.\hat{e}\,\hat{e}.\hat{v}_1 = r_1\,[\cos\alpha - \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha - \beta)\cos(\tfrac{\pi}{2} - \beta)]$$

$$= r_1[\cos\alpha - \sin(\alpha+\beta)\sin\beta]$$

(21) $\overrightarrow{\mathrm{HN}_2} = r_1[\cos\alpha - \sin(\alpha+\beta)\sin\beta]\hat{v}_1$

$$(22) \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{HN}_2}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{MH}}\right| = -\, r_1 \sin(\alpha+\beta)\sin\beta$$

Donc pour les petits angles :

$$(23) \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{HN}_2}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{MH}}\right| = -\, r_1\,(\alpha+\beta)\,\beta \simeq 0$$

Le problème du positionnement des écrans ne semble donc a priori pas négligeable pour les grands angles, mais cette question nécessite un examen complémentaire.

Comparaison avec des présentations asymptotiques :

Il est intéressant de comparer le résultat (17) avec celui que donnerait une vitesse asymptotique correspondant à la même valeur de l'excentricité. Cela correspond simplement à l'écart entre $\cos\alpha/|e|$ et $1/|e|$. On obtient :

$$(24) \qquad 2(\beta_\infty - \beta) = \frac{\alpha^2}{|e|\cos\beta}$$

L'écart angulaire est donc très petit. Cette constatation conduit à reconsidérer le problème du positionnement de l'écran pour les grands angles. En effet, tous calculs faits on peut écrire:

$$(25) \qquad \frac{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{HN}_2}\right|} \simeq \frac{\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\cos\alpha - \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}\,\sin 2\beta \simeq \sin 2\beta$$

Compte tenu de (24) cette relation approchée reste vraie si, toutes choses égales par ailleurs, on choisit une position de l'écran fixe et plus éloignée que celle donnée par (21). La mesure du ratio (25) donne une excellente approximation de sin 2β , quelle que soit en pratique la distance à laquelle on place l'écran.

On note que l'on est bien en présence de la situation décrite par Feynman, à savoir que la rotation est entièrement déterminée par ce qui se passe à très courte distance du noyau. Il reste à construire son calcul intégral simplifié ... .

Conclusion :

Ce que le lecteur pourrait surtout retenir de cet exemple célèbre, c'est l'aisance avec laquelle la GA permet de retrouver les résultats connus en partant pratiquement de zéro, voire même d'en fournir des présentations plus générales, ainsi que des calculs d'erreurs.

G.Ringeisen

Août 2009

[1] Physique : Les astuces de Feynman   Pearson Education France