Spineurs ... encore.

En participant récemment à des discussions relatives à la définition des spineurs, d'une part sur un forum français, d'autre part sur Wikipedia, article « Spinors », je me suis rendu compte que cette notion restait d'un abord très difficile. Certes pour des algébristes expérimentés tout semble en ordre dans le cadre d'algèbres de Clifford traitées avec toute la rigueur bourbakiste ; on s'ébroue avec délices dans les théories de groupe les plus abstraites, dans les distinctions des ensembles irréductibles, dans les savantes classifications de toutes les algèbres imaginables, en écartant par principe toute approche géométrique. Dès qu'il s'agit cependant de transmettre ces connaissances, non seulement à des amateurs, mais aussi à des étudiants en physique qui ont besoin de tels outils en mécanique quantique, d'énormes difficultés de communication apparaissent.

Je me risque ici à fournir un avis très personnel, non pas d'expert, mais de « client ». Je crois que pour l'essentiel ces difficultés proviennent du fait que l'architecture moderne des mathématiques est conçue maintenant comme une immense structure interconnectée où chaque nouvel élément théorique vise à la plus grande généralité au prix d'une abstraction croissante. De la sorte quelqu'un qui à des fins pratiques souhaite se servir d'un outil conçu dans les tranches les plus récentes, est obligé d'acquérir une base de connaissances étonnamment vaste par rapport à son besoin final. S'il ne le fait pas il sera bloqué simplement par le fait qu'il ne comprendra pas le langage utilisé, ou encore parce qu'il n'aura pas le temps d'acquérir les réflexes de pensée nécessaires pour avoir la maîtrise du nouvel outil.

Il peut arriver de temps à autre, rarement, que surgisse un outil ou une approche pédagogique nouvelle, permettant d'accéder aux hautes couches mathématiques par des voies novatrices, par de saisissants raccourcis, donnant accès au couloir secret menant directement à la chambre royale. Je crois profondément que « l'algèbre géométrique » (GA), réinventée et développée par David Hestenes et quelques autres, fait partie de ces outils un peu miraculeux.

Or, et j'ai pu le vérifier encore récemment, cette approche est systématiquement négligée, voire même niée et franchement rejetée. C'est pour cela que je reviens sur cette question fort intéressante de définition des spineurs et de leur utilisation en mécanique quantique. C'est vraiment la GA qui m'a permis de reprendre contact avec la MQ, et de comprendre des notions que je croyais inaccessibles. Je vais donc essayer, en développant ce thème, de montrer par l'exemple l'exactitude de mes assertions.

Réinterprétation de l'équation de Schroedinger-Pauli.

Essayons donc de travailler simultanément en MQ classique non relativiste et en MQ traitée en GA. Ce qui est donc en cause ce sont deux versions (représentations ?, que les algébristes me pardonnent mes imprécisions de langage) de la même algèbre cliffordienne, l'une exprimée sous une forme matricielle (matrices de Pauli), l'autre sous une forme vectorielle, la GA.

Nous utilisons dans la suite essentiellement les éléments contenus dans les documents [1] et [2], en partant de l'équation de Schroedinger-Pauli décrivant l'interaction du spin de l'électron avec un champ magnétique. En MQ classique cette équation s'écrit :

(1) $$i'\hbar\partial_t\Psi = \mathcal{H}_S\Psi - \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\sigma}.B\Psi$$

où i' est l'imaginaire pur, $\mathcal{H}_S$ l'opérateur scalaire classique de Schroedinger (laplacien), Ψ le vecteur fonction d'onde ici représenté dans l'espace de spin par une colonne de deux nombres complexes (quatre paramètres), et où la curieuse expression $\hat{\sigma}.B = \hat{\sigma}_i\, B_i$ est un « vecteur de matrices », celles-ci étant les fameuses matrices de Pauli :

(2) $$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices ont d'abord été introduites par Pauli à la main, puis justifiées de manière rigoureuse par Dirac. Elles se sont imposées du fait de devoir expliquer l'existence de la caractéristique interne spin qui est de même nature qu'un moment angulaire orbital, mais sans lien possible avec une propriété de la physique classique.

En cherchant alors, comme on le fait dans l'expérience de Stern et Gerlach, à mesurer le spin le long de l'axe vertical du dispositif expérimental on était conduit à déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de l'opérateur quantique $\hat{\sigma}_3$, ce qui donnait :

(3) $$\hat{\sigma}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le facteur 1/2 apparaît en passant aux opérateurs de spin $\hat{s}_k = \frac{1}{2}\hbar\,\hat{\sigma}_k$; il se justifie par les relations de commutation auxquelles doivent satisfaire ces opérateurs :

(4) $$[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = \hat{s}_i\,\hat{s}_j - \hat{s}_j\,\hat{s}_i = i'\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{s}_k$$

D'autre part dans (3) on voit apparaître les fameux états *spin up, spin down* (sous la forme de spineurs). J'y reviendrai.

Auparavant il est intéressant de noter que les trois matrices de Pauli multipliées par i' et complétées par la matrice unité I constituent une base évidente [1] de l'espace, à coefficients réels, des matrices complexes (2,2) de la forme :

(5) $$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} = a_0\,I + a_k\,i'\,\hat{\sigma}_k$$

Comme les deux colonnes d'une telle matrice contiennent en double les mêmes paramètres, il est clair qu'en multipliant ces matrices à droite par le vecteur colonne $u=(1,0)^T$ on va obtenir des vecteurs $\Psi = \hat{\psi}\,u$ en relation bijective avec les matrices. D'autre part $\hat{\psi}$ est un polynôme pair en matrices de Pauli, à coefficients a_k , a_0 , réels [2]. En définitive on peut donc exprimer un spineur quantique soit sous la forme d'un vecteur (de l'espace abstrait de spin) soit sous forme d'une matrice, c'est à dire d'un opérateur pouvant agir sur cet espace.

On note les relations utiles suivantes :

(6) $$\hat{\sigma}_3\,u = u \qquad \hat{\sigma}_1\,\hat{\sigma}_2\,u = i'\,\hat{\sigma}_3\,u = i'\,u$$

On peut donc écrire (1) sous la forme :

(7) $$\hbar\partial_t\,\hat{\psi}\,\hat{\sigma}_1\,\hat{\sigma}_2\,u = \mathcal{H}_S\,\hat{\psi}\,u - \frac{e\hbar}{2mc}\,B_k\,\hat{\sigma}_k\,\hat{\psi}\,\hat{\sigma}_3\,u$$

La bijectivité ci-dessus notée permet d'éliminer u :

(8) $$\hbar\partial_t\,\hat{\psi}\,\hat{\sigma}_1\,\hat{\sigma}_2 = \mathcal{H}_S\,\hat{\psi} - \frac{e\hbar}{2mc}\,B_k\,\hat{\sigma}_k\,\hat{\psi}\,\hat{\sigma}_3$$

(9) $$\hbar\partial_t\,\psi\,\sigma_1\,\sigma_2 = \mathcal{H}_S\,\psi - \frac{e\hbar}{2mc}\,B_k\,\sigma_k\,\psi\sigma_3$$

Or on sait qu'il y a un parfait isomorphisme entre l'algèbre de Clifford exprimée par les matrices de Pauli et celle exprimée par l'approche vectorielle réelle de Hestenes (GA). On peut donc écrire :

(10) $$\hat{\sigma}_k \Longleftrightarrow \sigma_k \qquad \hat{\psi} \Longleftrightarrow \psi = a_0 + a_k\,i\,\sigma_k$$

Bien entendu dans cette dernière expression i représente non pas l'imaginaire unité, mais le pseudoscalaire unité de l'algèbre de Clifford $\boldsymbol{R}(3,0)$.

1. Il suffit de les écrire côte à côte ...

2. Le caractère pair résulte de manière évidente des relations de commutation des σ .

Le spineur redéfini.

Si maintenant nous considérons le spineur $\Psi=\hat{\psi}\, u$ nous voyons en appliquant (5) :

(11) $$\Psi=\begin{pmatrix} a_0+i'\,a_3 \\ i'a_1-a_2 \end{pmatrix}$$

La comparaison avec l'expression (10) montre ce que R.Boudet a mis en évidence de longue date [3] , à savoir que *le spineur complexe* Ψ *, conçu bien avant la mécanique quantique par Elie Cartan, est une version démembrée et méconnaissable du quaternion*[3] ψ . Compte tenu des importants travaux de mathématiques pures auxquels ont donné lieu ces spineurs je ne me hasarderai certes pas à porter un jugement de valeur sur ce point, mais force est de constater que certains travaux théoriques de physique auraient pu prendre une toute autre orientation. Ce qui est étonnant c'est qu'il a fallu près de soixante ans pour s'en rendre compte.

En tout cas tout ceci permet de comprendre intuitivement pourquoi le spineur est difficile à exposer [4], à comprendre et à manipuler (comment expliquer la transformation d'un objet aussi étrange dans une rotation).

Il est bien évident qu'à contrario *le spineur* ψ *a une définition simple ; il s'agit d'un multivecteur pair de l'algèbre géométrique associée à l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$. Dans cet espace les vecteurs σ sont sans mystère ; ce sont des vecteurs de base orthonormés.

Donnons alors quelques indications sur la façon de transposer en GA l'action sur les états Ψ des opérateurs quantiques $\hat{\sigma}$:

(12) $$\hat{\sigma}_k\,\Psi \iff \hat{\sigma}_k\,\hat{\psi}\,u=\hat{\sigma}_k\,\hat{\psi}\,\hat{\sigma}_3\,u \iff \sigma_k\,\psi\,\sigma_3 \qquad\qquad i'\,\Psi \iff \psi i\sigma_3$$

L'ajout de σ_3 , grâce à la relation (6) , permet de rester dans les multivecteurs pairs.

Spineurs et rotations.

Avant d'aborder les questions de spins, il faut d'abord passer en revue le rôle des spineurs dans la formulation des rotations. Le premier outil enseigné à cet effet en mécanique classique est le calcul matriciel. Une rotation dans $\mathbb{R}^3$ sera représentée par une matrice R , donnant la transformation active suivante :

(13) $$v'=Rv$$

où v et v' représentent des vecteurs colonnes.

Les besoins de la physique moderne, en particulier pour les transpositions vers la mécanique quantique, ont entraîné le développement d'outils plus efficaces, par le biais de la définition et de la formalisation des générateurs de rotation (infinitésimale) [4]. Dans un premier stade ceux-ci permettent d'exprimer les rotations dans $\mathbb{R}^3$ par des opérateurs $\mathcal{R}$ s'exprimant formellement, pour une rotation d'axe n et d'angle θ de la manière suivante :

(14) $$\mathcal{R}=e^{i'\,\theta n_i\,J_i} \qquad\qquad v'=\mathcal{R}v$$

où les J_i sont des matrices élémentaires *complexes* que nous ne détaillerons pas ici [5]. La matrice $\mathcal{R}$ s'obtient par sommation d'une série convergente de matrices, après développement de (14). On décrit dans [4] et de manière plus sommaire dans [5] la façon dont on a mis en évidence la possibilité de traduire le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ par une représentation bidimensionnelle dite SU(2) dont les éléments matriciels sont précisément ceux définis par la formule (5) et les vecteurs sont les spineurs colonnes complexes sur lesquels ils agissent.

3. *Quaternion dans sa version GA.*

4. Il suffit de comparer quelques textes d'enseignement. On a souvent l'impression que les auteurs cherchent à définir les spineurs par défaut, en tournant autour, espérant faire surgir « la chose » de la description de son environnement ou de ses effets.

5. Ce sont les matrices génératrices des rotations autour des trois axes.

L'isomorphisme décrit par les relations (10) dans le cadre de la mécanique quantique s'applique donc aussi à la représentation des rotations dans $\mathbb{R}^3$ par SU(2) qui est isomorphe à la représentation de ces rotations par la GA. Ce rapprochement est examiné dans [5]. Sans entrer dans les détails rappelons que l'avantage décisif apporté par la GA est caractérisé par le rotor, c'est à dire un spineur unitaire, qui permet d'écrire dans $\mathbb{R}^3$:

$$(15) \qquad v' = RvR^{-1} \qquad \text{avec} \qquad R = e^{in\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + in\sin\frac{\theta}{2}$$

Cette façon de faire permet d'éviter d'introduire la notion de générateur de rotation et surtout d'opérer directement dans $\mathbb{R}^3$, sans introduire l'espace abstrait permettant la représentation du groupe SU(2). Elle facilite en outre considérablement la composition de rotations successives.

Cette description sommaire pourrait laisser penser que le gain est somme toute assez mince. Mais il suffit d'avoir une seule fois feuilleté l'abondante et sophistiquée littérature standard sur les rotations, tant en physique classique que quantique, pour avoir une idée plus juste de la situation.

Dans ce cadre bien entendu les matrices $\hat{\sigma}$, devenues les vecteurs σ, perdent leur signification d'opérateurs quantiques pour prendre modestement leur place de vecteurs de base dans le cadre de l'algèbre géométrique de $\mathbb{R}^3$. L'étude des rotations en mécanique quantique s'en trouve grandement facilitée, ce qui a une répercussion immédiate sur l'étude et la signification du spin.

Dissiper les mystères du spin.

Ce sous-titre paraît bien prétentieux. Je le justifie par le fait que les présentations traditionnelles des notions de spin et de spineurs ont certainement donné des cauchemars à bien des étudiants. Enormes difficultés que la GA permet de surmonter avec beaucoup d'aisance. Pour en donner une petite idée j'ai choisi l'exemple d'un cours publié sur internet.

Le chapitre sur la particule de spin 1/2 commence bien entendu par l'expérience de Stern-Gerlach. L'état $|s>$ de la particule est décrit dans l'espace $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ par les deux états *orthogonaux* $|+_z>$, $|-_z>$. Ces deux états correspondent à des spins hauts et bas parallèles à l'axe z . Certes l'auteur ajoute une note en bas de page anticipant sur des explications futures, mais nous voilà déjà au bout de deux phrases avec des questions propres à semer la confusion : comment des éléments de $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ peuvent-ils être parallèles en $\mathbb{R}^3$ à l'axe z ; que signifie géométriquement la notion d'orthogonalité dans $\mathcal{H}_{\text{spin}}$, espace vectoriel construit sur les nombres complexes ?

En effet l'auteur fait remarquer que dans l'espace ordinaire les états $|+_z>$ et $|-_z>$ forment un angle de 180° entre eux, contre 90° dans l'espace de spin. Puis dans un louable effort pédagogique, dessin à l'appui, il indique qu'une rotation d'un angle $\theta/2$ dans $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ va se traduire pour $|+_z> \Longrightarrow |s_\theta>$ dans le plan (x, z) par une rotation d'un angle θ . Certes plus tard l'auteur va introduire le calcul de la valeur moyenne de la mesure du spin sur un axe, et la sphère de Bloch, mais non sans avoir raisonné pendant encore plusieurs pages comme si les *états de spin* pouvaient être représentés indifféremment dans l'espace abstrait de spin et dans l'espace réel. En somme paradoxalement il aura anticipé sur une algèbre géométrique qu'il n'utilise pas (voir ci-dessous).

D'autres auteurs (Schulten, Durrer) vont introduire le spin d'une manière purement algébrique et abstraite, ne laissant aucune place aux raisonnements intuitifs. Ces approches nécessitent une forte culture mathématique (theorie des représentations, etc ...).

En sens inverse la définition du spin en GA est étonnamment simple et intuitive (voir [1] et [2]). On est conduit à définir le vecteur de spin :

$$(16) \qquad s = \tfrac{1}{2}\hbar\psi\sigma_3\tilde{\psi}\rho^{-1} \qquad \rho = \psi\tilde{\psi}$$

qui représente la rotation, suivie d'une dilatation neutralisée par ρ^{-1}, du vecteur de base σ_3 .

La mesure quantique sur l'axe σ_k sera donnée par :

$$(17) \qquad \rho^{-1} < \psi|\hat{s}_k|\psi > \Longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\hbar < \sigma_k\psi\sigma_3\tilde{\psi} > \rho^{-1} = \sigma_k.\text{s}$$

qui représente la projection du vecteur spin sur l'axe σ_k .

Ainsi si nous considérons les spineurs spin up et spin down définis sous (3), on obtient successivement en utilisant (11) puis (16) :

(18) $\qquad |\uparrow> \Longleftrightarrow 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = \frac{1}{2}\,\hbar\,(1)\,\sigma_3\,(1) = \frac{1}{2}\,\hbar\,\sigma_3$

(19) $\qquad |\downarrow> \Longleftrightarrow -i'\,\hat{\sigma}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{2}\,\hbar(-\,i\sigma_2)\sigma_3\,(\sigma_2\,i) = -\frac{1}{2}\,\hbar\,\sigma_3$

On retrouve donc bien, mais cette fois-ci sans ambiguïté dans $\mathbb{R}^3$, la disposition prévue des spins dans l'exemple étudié.

Il reste à préciser l'effet d'une rotation active ou passive sur les spineurs de Pauli. Supposons pour simplifier qu'il s'agisse d'une rotation passive, c'est à dire d'un changement des vecteurs de base. Sans changer le système physique étudié on prend d'autres vecteurs de base σ'_k . Si C est le rotor de passage, on a :

(20) $\qquad \sigma_k = \tilde{C}\,\sigma'_k\,C$

Le vecteur spin n'est évidemment pas affecté par le changement de base. On a donc :

(21) $\qquad s = \frac{1}{2}\,\hbar\,\psi\sigma_3\,\tilde{\psi}\rho^{-1} = \frac{1}{2}\,\hbar\,\psi\,\tilde{C}\,\sigma'_3\,C\,\tilde{\psi}\rho^{-1} = \frac{1}{2}\,\hbar\,\psi'\,\sigma'_3\,\tilde{\psi}'\,\rho^{-1}$

Les spineurs ψ se transforment donc selon la loi :

(22) $\qquad \psi' = \psi\,\tilde{C}$

qui traduit simplement le fait que pour passer de $\frac{1}{2}\,\hbar\,\sigma'_3$ à s il faut maintenant enchaîner les deux rotations $\tilde{C}$ et ψ . Une autre façon de dire cela est de constater que les spineurs dépendent de la base de référence choisie [6], contrairement aux cactéristiques physiques intrinsèques du système étudié, comme s et ρ. On note d'ailleurs que :

(23) $\qquad \rho = \psi\,\tilde{\psi} = \psi'\,C\,\tilde{C}\,\tilde{\psi}' = \psi'\,\tilde{\psi}'$

Tous ces calculs et raisonnements sont, grâce à la GA, pratiquement à la portée d'un débutant en mécanique quantique ... Le contraste avec l'approche standard est saisissant !

L'équation et les spineurs de Dirac.

Les mêmes méthodes peuvent être étendues à l'espace de Minkowski, sans difficulté. Pour l'étude du spineur le lecteur peut se reporter notamment à [4] et [6].

Georges Ringeisen

Février 2010

[1] Hestenes Oersted Medal lecture 2002

6. Il est peut-être intéressant d'insister sur ce point, surtout pour les lecteurs ayant l'habitude de raisonner en termes de coordonnées. Si ψ était comme s un élément intrinsèque du système physique étudié, il ne se passerait rien, on aurait $\psi' = \psi$. Si en revanche ψ était un multivecteur lié de manière « rigide » avec le repère σ_k on devrait avoir $\psi' = C\psi\,\tilde{C}'$. Mais en réalité le spineur est **par définition** à cheval entre les deux situations. C'est peut-être ce fait, mal reconnu, qui a conduit à l'idée curieuse du spineur racine carrée du vecteur ... Le spineur en MQ standard aussi bien qu'en GA, saisit la quantité étudiée en sandwich ($\psi \quad \tilde{\psi}$) , et cette situation est maintenue après rotation complémentaire ($\psi\tilde{C} \quad C\tilde{\psi}$) .

[2] Doran Lasenby   Geometric Algebra for Physicists

[3] Roger Boudet   La théorie intrinsèque de la particule de Dirac et « l'Ecole Louis de Broglie »

[4] B.Delamotte   Un souçon de théorie des groupes

[5] Ringeisen   Phymatheco   La théorie des groupes (en GA)

[6] Ringeisen   Phymatheco   La transformation de Lorentz (en GA)

Compléments d'algèbre de Clifford.

Lors de discussions récentes j'ai eu l'occcasion de me pencher davantage sur l'aspect matriciel de l'algèbre de Clifford, notamment en compulsant un livre connu de Pertti Lounesto [7], lecture utilement complétée par celle d'une dissertation d'un doctorant Allemand, Florian Jung [8] . Ce dernier texte m'a paru bien plus équilibré que l'ouvrage de Lounesto, en ce sens qu'il s'intéresse vraiment à l'algèbre géométrique (vectorielle) et à ses relations avec l'algèbre de Clifford (matricielle), alors que Lounesto a très largement privilégié l'aspect matriciel.

Cette lecture m'a fait comprendre toute l'importance de la structure (5) des matrices $\hat{\psi}$, que l'on peut appeler les matrices paires d'un espace matriciel Mat(2, $\mathcal{C}$). Plus précisément elles constituent une sous-algèbre de l'algèbre matricielle de Clifford, dont une base peut être définie par les matrices paires :

(24) $$\mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i'\hat{\sigma}_1=\begin{pmatrix} 0 & i' \\ i' & 0 \end{pmatrix} \qquad i'\hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad i'\hat{\sigma}_3=\begin{pmatrix} i' & 0 \\ 0 & -i' \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de noter que cette notion de parité, évidente en GA (voir équation (5)), l'est beaucoup moins en regardant les matrices ...

On a parfois critiqué certains textes de David Hestenes pour avoir donné une démonstration insuffisante du passage de l'équation (1) que l'on peut appeler P-S (Pauli-Schroedinger) à l'équation (9) P-S-H (Pauli-Schroedinger-Hestenes). Du coup dans les textes écrits par les algébristes Cliffordiens purs on trouve des démonstrations, pas très difficiles, mais peut-être quelque peu pédantes, à grand renfort de notions savantes (les idempotents, les idéaux). L'amateur est désorienté.

Or on peut facilement montrer en considérant l'équation matricielle :

(8) $$\hbar\partial_t\hat{\psi}\,\hat{\sigma}_1\,\hat{\sigma}_2=\mathcal{H}_S\hat{\psi}\;-\frac{e\hbar}{2mc}B_k\hat{\sigma}_k\hat{\psi}\;\hat{\sigma}_3$$

que l'équation spinorielle :

(1) $$i'\,\hbar\partial_t\Psi=\mathcal{H}_S\Psi-\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\sigma}.B\Psi$$

vérifiée par la première colonne des matrices, l'est aussi par la seconde. Il suffit de faire les calculs détaillés pour les quatre éléments matriciels ; voir [8].

Il me semble cependant, sous réserve d'être contredit, que l'on peut donner une démonstration étonnamment simple, sans calcul, de cette propriété de bijectivité. En effet posons a priori l'équation (8) avec la structure :

(5) $$\hat{\psi}=\begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}=a_0\,I+a_k\,i'\,\hat{\sigma}_k$$

D'autre part réécrivons l'équation (8) en faisant apparaître clairement les matrices paires :

(25) $$\hbar\partial_t\hat{\psi}\,(\hat{\sigma}_1\,\hat{\sigma}_2)-\mathcal{H}_S\hat{\psi}\;-\frac{e\hbar}{2mc}B_k\,(i'\hat{\sigma}_k)\hat{\psi}(i'\,\hat{\sigma}_3)=0$$

Toutes les matrices figurant dans cette équation différentielle sont des éléments pairs de l'espace Mat$(2,\mathcal{C})$, donc globalement nous pouvons écrire :

(26) $$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\bar{\Phi}_2 \\ \Phi_2 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} = 0$$

La structure très simple de la matrice $i'\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2$ permet de voir sans calcul que les termes Φ_1 et Φ_2 ne comprennent chacun que les variables ψ_1 et ψ_2 . En multipliant par le vecteur $u = (1,0)^T$ on obtient :

(27) $$\Phi u = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\bar{\Phi}_2 \\ \Phi_2 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1) de Pauli - Schroedinger.

Bien entendu nous avons aussi $\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 = 0$. Donc la bijectivité entre P-S et P-S-H est rigoureusement démontrée. Le maillon qui manquait est la conséquence évidente de la structure particulière des matrices paires de $\mathrm{Mat}(2,\mathcal{C})$. Donc la GA vectorielle est possible !

G.Ringeisen

Mars 2013

[7] Pertti Lounesto Clifford Algebra and Spinors

[8] Florian Jung Geometrische Algebra und die Rolle des Clifford-Produkts in der Klassischen und Quantenmechanik