Torseurs en algèbre géométrique - Les ambiguïtés de l'algèbre de Gibbs

Je me suis inspiré pour la présente note d'un document très complet rédigé par Y.Remion en 1995, «- *Torseurs, un cours minimal* - , disponible sur internet. Il m'a paru intéressant de traiter ce sujet en GA, ce qui devrait permettre des calculs plus souples et plus compacts.

Un **vecteur glissant** sera caractérisé par un vecteur v et un point d'ancrage a qui pourra devenir $(a+\lambda v)$: en GA ces trois éléments sont des vecteurs.

Le **moment** du vecteur glissant par rapport à l'origine O sera :

(1) $\quad M^o = a \wedge v = (a+\lambda v) \wedge v$

Le moment par rapport à un point Q sera donc :

(2) $\quad M^q = (a-q) \wedge v = M^o - q \wedge v$

Les moments sont donc, dans la logique de la GA, non pas des *pseudovecteurs* mais des *bivecteurs*. Si l'on veut repasser, au niveau de la présentation d'un résultat, en algèbre de Gibbs, on utilisera les formules :

(3) $\quad a \wedge b = I a \times b \qquad a \times b = -I a \wedge b$

où I est le pseudoscalaire unité dans $\mathbb{R}^3$.

Torseurs.

Soit un ensemble de vecteurs glissants (v_i, a_i) . On définit la résultante s et le moment total M^o par :

(4) $\quad s = \sum_i v_i$

(5) $\quad M^o = \sum_i M_i^o = \sum_i a_i \wedge v_i$

(6) $\quad M^q = \sum_i M_i^q = \sum_i (a_i - q) \wedge v_i = M^o - q \wedge s$

Invariant.

La formule (6) permet de définir immédiatement un invariant *pseudoscalaire* évident :

(7) $\quad M^q \wedge s = M^o \wedge s$

qui devient un invariant scalaire sous la forme :

(7bis) $\quad (I m^q) \wedge s = (I m^o) \wedge s \implies m^q.s = m^o.s$

Axe central. Moment minimal.

Nous cherchons les points Q tels que :

(8) $\quad M^q.s = 0$

Soit :

(9) $\quad (M^o - q \wedge s).s = 0$

(10) $\quad q = q_\parallel + q_\perp \qquad q_\perp.s = 0 \qquad q_\parallel \wedge s = 0$

(11) $\qquad (M^o - q_\perp \wedge s).s = M^o.s - q_\perp s^2 = 0$

(12) $\qquad q_\perp = M^o.s s^{\perp 2} \qquad q_\| = \lambda s \qquad q = M^o.s s^{\perp 2} + \lambda s$

Ces relations définissent la droite appelée axe central. Le point q^* correspondant à $\lambda = 0$ est la projection de l'origine sur l'axe central.

Le moment en n'importe quel point de l'axe central est égal à :

(13) $\qquad M^q = M^o - s^{\perp 2}(M^o.s) \wedge s$

Il est indépendant de λ. Il est intéressant de noter que ce moment ne dépend pas de la longueur de la résultante s , mais uniquement de sa direction.

On peut donner une autre formulation de ce moment en notant que :

(14) $\qquad M^o s^2 = (M^o.s + M^o \wedge s)s$

(15) $\qquad M^q = M^o - s^{\perp 2}(M^o.s) \wedge s = s^{\perp 2}(M^o \wedge s).s = s^{\perp 2}(M^o \wedge s)s$

(16) $\qquad M^q = Is[\, s^{\perp 2} \sum_i \det(a_i, v_i, s)] = \mu I s^{\perp 1} \qquad \tilde{M}^q = -\,\mu I s^{\perp 1}$

On a donc :

(17) $\qquad |M^q|^2 = M^q \tilde{M}^q = s^{\perp 2}\,[\sum_i \det(a_i, v_i, s)]^2$

Si nous considérons un point r extérieur à l'axe central, nous pouvons écrire :

(18) $\qquad M^r = M^q - (r-q)s \qquad \tilde{M}^r = \tilde{M}^q - s(r-q) \quad$ avec $\quad (r-q).s = 0$

(19) $\qquad M^r \tilde{M}^r = M^q \tilde{M}^q - M^q s(r-q) - (r-q)s\,\tilde{M}^q + (r-q)^2 s^2 = M^q \tilde{M}^q + (r-q)^2 s^2$

(20) $\qquad |M^r|^2 > |M^q|^2$

Le moment est minimal sur l'axe central.

Champs de moments équiprojectifs.

Par définition de l'équiprojectivité (pour les vecteurs ...), on devrait avoir :

(21) $\qquad (M^p - M^r) \wedge (p - r) = 0$

Cette relation est effectivement vérifiée puisque $(M^p - M^r) = -\,(p - r) \wedge s$.

Donc tout champ de moments est équiprojectif.

Réciproque.

Soit un champ équiprojectif donné sous forme de pseudovecteurs, que nous transformons en bivecteurs M^p satisfaisant à l'équation (21). Nous voulons démontrer que ce champ de bivecteurs est un champ de moments. En appliquant la relation (21) respectivement aux couples M^p, M^o et M^r, M^o on obtient :

(22) $\qquad (M^p - M^o) \wedge p = 0 \qquad (M^r - M^o) \wedge r = 0$

Ces relations impliquent[1] que $(M^p - M^o)$ et $(M^r - M^o)$ puissent être mis sous la forme :

(23) $\qquad (M^p - M^o) = s^p \wedge p \qquad (M^r - M^o) = s^r \wedge r$

1. En effet les relations (22) impliquent (en $\mathbb{R}^3$) que le bivecteur simple $(M^p - M^o)$, par exemple, définisse un plan contenant le vecteur p. Celui-ci peut alors être retenu à son tour pour définir ce plan. D'où les relations (23) . On voit comment la géométrie vient au secours du calcul.

A priori s^p , s^r pourraient être quelconques, mais :

(24) $$0 = (M^p - M^r) \wedge (p - r) = (s^p \wedge p - s^r \wedge r) \wedge (p - r) = (s^p - s^r) \wedge r \wedge p$$

Ceci implique donc :

(25) $$s^p = s^r = s \qquad M^p - M^o = s \wedge p \qquad M^r - M^o = s \wedge r$$

Donc s peut être interprété comme étant la résultante d'un champ de vecteurs générateur du champ de moments M^p.

Il nous reste à montrer que l'on peut calculer s à partir des M^p.

Considérons un repère orthonormé (u, v, w) . Par hypothèse nous connaissons les moments M^u, M^v, M^w qui satisfont aux relations de type (25) :

(26) $$M^u - M^o = s \wedge u \qquad M^v - M^o = s \wedge v \qquad M^w - M^o = s \wedge w$$

Posons :

(27) $$s = s_u u + s_v v + s_w w$$

On note que les moments ci-dessus ne sont pas indépendants, puisque :

(28) $$s_u M^u + s_v M^v + s_w M^w - (s_u + s_v + s_w) M^o = s \wedge s = 0$$

Il suffit donc d'utiliser deux d'entre eux, par exemple $(M^u - M^o)$ et $(M^v - M^o)$. A partir de (26) nous calculons :

(29) $$(M^u - M^o).(u \wedge v) = s_v \qquad (M^u - M^o).(u \wedge w) = s_w \qquad (M^v - M^o).(v \wedge u) = s_u$$

On vérifie qu'il n'y a pas de contradiction en calculant :

(30) $$(M^v - M^o).(v \wedge w) = s_w$$

ce qui implique de manière évidente (cela correspond au lemme de la note de référence) :

(31) $$(s \wedge u).(u \wedge w) - (s \wedge v).(v \wedge w) = (s \wedge u).(-Iv) - (s \wedge v).(Iu) = I\{-s \wedge u \wedge v - s \wedge v \wedge u\} = 0$$

Nous avons donc bien démontré que le champ de bivecteurs M^p est un champ de moments [relations (25)], pour lequel nous savons calculer la résultante s [relations (29)] d'un champ de vecteurs générateur, et dont le moment à l'origine est M^o.

La démonstration ci-dessus me paraît plus intuitive et donc plus facile à découvrir et à comprendre que celle de la note de référence établie en algèbre de Gibbs.

Réflexions complémentaires.

Il me semble que l'analyse ci-dessus a une portée plus importante que la simple comparaison pratique de deux outils mathématiques. En fait on est amené inéluctablement à souligner les ambiguïtés apparaissant en algèbre de Gibbs du fait de l'existence du produit vectoriel classique.

Prenons le cas très simple d'un corps solide tournant avec une vitesse angulaire constante autour d'un axe de direction fixe, passant par son centre de gravité. Que devons-nous penser du champ des vitesses à l'instant t ?

En algèbre de Gibbs la vitesse en un point $x(t)$ du corps solide est de la forme :

(32) $$v(t) = v_G(t) + \omega \times (x - x_G)$$

Certes du point de vue dimensionnel tout est en ordre puisque ω se mesure en radians par seconde, mais du point de vue vectoriel on est bien en présence de la somme d'un vecteur vrai v_G et d'un pseudovecteur. S'agit-il donc d'un champ de vecteurs ou d'un champ de moments ?

En revanche en GA on écrira :

(33) $\qquad v(t) = v_G(t) + (x - x_G) \,.\, \Omega = v_G(t) + (x - x_G) \wedge \omega\, I$

ou l'on a bien une somme de vecteurs. Si nous voulons l'étudier en tant que champ de moments il suffira de multiplier (33) par I :

(34) $\qquad I v(t) = I v_G(t) + I\,(x - x_G) \,.\, \Omega = I v_G(t) - (x - x_G) \wedge \omega$

Pour mieux comprendre l'ambiguïté de la situation en algèbre de Gibbs il faut passer en écriture tensorielle. On a coutume d'écrire :

(35) $\qquad a \times b = a^i b^j\, e_i \times e_j = a^i b^j\, \varepsilon_{ijk}\, e^k$

Mais il ne faut pas oublier que ceci n'est vrai qu'en coordonnées orthonormées directes, et qu'en réalité il faut écrire[2] :

(36) $\qquad a \times b = a'^i b'^j\, e'_i \times e'_j = a'^i b'^j\, \varepsilon'_{ijk}\, \Delta'\, e'^k \qquad$ avec $\qquad \Delta' = \det |\partial x / \partial x'|$

($\Delta = 1$ en coordonnées orthonormées directes)

La formule (36) montre que $a \times b$ est un vecteur *covariant* de composantes $c'_k = a'^i b'^j\, \varepsilon'_{ijk}\, \Delta'$.

Le vecteur de la formule (32) est alors la somme d'un tenseur v_G normalement contravariant et d'un tenseur $\omega \times (x - x_G)$ une fois covariant ! On ne s'en aperçoit pas parce que l'on reste en général en coordonnées orthonormées dans les applications, mais il n'empêche que le vecteur $v(t)$ n'est pas invariant au sens tensoriel du terme.

Cette difficulté n'existe pas bien entendu en GA puisque par construction cet outil mathématique est *coordinate-free*. On peut vérifier cela en écrivant (33) sous forme tensorielle :

(37)
$$v^i\, e_i = v_G^i\, e_i + (x^i - x_G^i) e_i \,.\, (\tfrac{1}{2} \Omega^{jk}\, e_j \wedge e_k) = v_G^i\, e_i + \tfrac{1}{2}(x^i - x_G^i) \Omega^{jk}\, e_i \,.\, (e_j \wedge e_k)$$
$$= v_G^i\, e_i + \tfrac{1}{2}(x^i - x_G^i) \Omega^{jk}\, (g_{ij}\, e_k - g_{ik}\, e_j)$$

ce qui est bien une somme de tenseurs une fois contravariants.

G.Ringeisen

Juillet 2008

2. ε'_{ijk} est une capacité tensorielle, Δ' une densité scalaire ; leur produit est un tenseur.