Exemple de démonstration en géométrie du triangle.

Un joli théorème en géométrie du triangle, pas très difficile à démontrer en géométrie pure, est celui reliant dans un triangle A, B, C, l'orthocentre H, le centre du cercle circonscrit O et le centre de gravité G. Ces points sont alignés et l'on a :

(1) $$2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GH} = 0$$

On passe de H en O par une homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Démontrons cela par l'algèbre géométrique.

Remarque préliminaire et notations :

Pour éviter les duplications de notation nous gardons celles de la géométrie ordinaire. Contrairement aux habitudes en GA les termes tels que A, B, etc..., ne désigneront donc pas des multivecteurs mais de simples vecteurs. Comme nous travaillons hors systèmes de coordonnées nous n'avons pas besoin de fixer un point origine dans le plan. Cette facilité, ainsi que l'existence du «produit extérieur», vont nous donner beaucoup de souplesse par rapport au calcul vectoriel ordinaire.

Soit donc un triangle A, B, C, comme indiqué ci-dessus. Nous appelons a, b, c, les côtés orientés :

(2) $$\begin{cases} a = C - B \\ b = A - C \\ c = B - A \end{cases}$$

On en déduit immédiatement les relations utiles pour la suite :

(3) $$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a.A + b.B + c.C = 0 \\ a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a \end{cases}$$

Détermination de l'orthocentre :

Soit un point H satisfaisant aux trois relations caractérisant les hauteurs :

(4) $$\begin{cases} H.a = A.a \\ H.b = B.b \\ H.c = C.c \end{cases}$$

En additionnant les relations (4) on voit qu'elles sont compatibles, en raison des deux premières relations (3), ce qui démontre le théorème de l'orthocentre.

Nous voulons maintenant définir explicitement H en fonction de A, B, C, ce qui revient à en calculer les coordonnées barycentriques.

Posons donc :

(5) $$H = \lambda A + \mu B + \nu C \qquad \text{avec} \qquad \lambda + \mu + \nu = 1$$

En combinant ces relations avec (4) on obtient :

(6) $$\begin{cases} \lambda b.a - \mu a^2 = b.a \\ \lambda b^2 - \mu a.b = -a.b \end{cases}$$

On en tire :

$$\lambda = \frac{(a.b)^2 + a^2(a.b)}{(a.b)^2 - a^2 b^2} \qquad \mu = \frac{(a.b)^2 + b^2(a.b)}{(a.b)^2 - a^2 b^2}$$

Ces formules ne sont pas satisfaisantes, car elles ne font pas ressortir la symétrie ternaire inhérente au problème. Mais nous pouvons les transformer :

$$(a.b)^2 + a^2(a.b) = (a.b)(a.b + a^2) = -\,(a.b)(a.c)$$

$$(a.b)^2 - a^2b^2 = (a\wedge b)^2 = (b\wedge c)^2 = (c\wedge a)^2$$

On obtient en définitive :

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{(a.b)(a.c)}{-\,(b\wedge c)^2} \\ \mu = \frac{(b.c)(b.a)}{-\,(c\wedge a)^2} \\ \nu = \frac{(c.a)(c.b)}{-\,(a\wedge b)^2} \end{cases}$$

Ces formules sont bien symétriques par permutation circulaire. Notons que les dénominateurs sont égaux et positifs, et que les numérateurs permettent instantanément par leur signe de préciser dans quelle zone intérieure ou extérieure se situe H. Il faudrait être un mathématicien singulièrement blasé pour ne pas être sensible au caractère esthétique de ce résultat et à la simplicité des calculs qui ont permis de l'obtenir.

Nous pouvons aussi passer en variables angulaires. Appelons α, β, γ, les angles intérieurs arithmétiques du triangle. On obtient immédiatement :

$$\frac{(a.b)(a.c)}{-\,(b\wedge c)^2} = \frac{\cos\gamma\cos\beta}{\sin^2\alpha}\,\frac{|a|}{|b|}\,\frac{|a|}{|c|} = \frac{\cos\gamma\cos\beta}{\sin^2\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma}$$

c'est à dire :

$$(8) \qquad \lambda = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma} \qquad \mu = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha} \qquad \nu = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

On vérifie aisément que l'on a bien :

$$\lambda + \mu + \nu = 1$$

Relation avec les autres points remarquables :

Le centre O du cercle circonscrit à A, B, C, est évidemment l'orthocentre du triangle A', B', C', construit sur le milieu des côtés. Or ce dernier a les mêmes angles intérieurs que le triangle A, B, C . Donc :

$$(9) \qquad O = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha} + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta} + \frac{1}{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma}\right) + \frac{C}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma} + \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha}\right)$$

On en déduit immédiatement :

$$(10) \qquad 2O + H = (A + B + C)\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha} + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta} + \frac{1}{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma}\right) = A + B + C = 3G$$

Donc :

$$(11) \qquad G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H$$

ce qui est le théorème annoncé.

G.Ringeisen

octobre 2005