Etude d'un modéle de financement par emprunts.

Notre objectif est d'étudier de manière complète un modèle de financement par emprunts en utilisant les possibilités d'analyse offertes par le contrôle optimal. Nous ne chercherons pas à optimiser simultanément le choix des investissements, car nous considérons que de tels modèles globaux ne sont pas réalistes. En revanche nous nous fixerons par le biais d'une "marge sur investissements" un certain niveau de rentabilité que l'entreprise estime pouvoir atteindre, hors fluctuations conjoncturelles. C'est par rapport à cette marge que nous établirons des critères de choix des emprunts. Enfin nous ferons des rapprochements avec des modèles simples de croissance.

Sur un plan technique nous serons amenés à mettre en oeuvre le contrôle optimal dans une situation où il existe des contraintes héréditaires par le biais des échéanciers de remboursement d'emprunts. Le modèle que nous présentons permet de prendre en compte de nombreux paramètres et d'examiner ensuite leur impact numérique : taux d'inflation, taux de dépréciation économique des investissements, taux de l'amortissement comptable et fiscal, taux d'imposition.

Définition du modèle.

A chaque instant t nous prenons une décision d'investissement $\gamma(t)$ (il s'agit évidemment d'un flux γdt), un certain nombre de décisions d'endettement ε^i, celles-ci étant relatives à des emprunts diponibles en quantité limitée, au taux u^i, et avec loi de remboursement $f^i(\theta - t)$, qui est une fonction décroissante de $(\theta - t)$, depuis $f^i(0) = 1$. Les γ^i et ε^i sont les **variables de commande** du modèle.

L'état du système est caractérisé à chaque instant par ses **variables d'état** : $I(t)$ qui est la valeur comptable nette des immobilisations, après amortissements, $\mathfrak{I}(t)$ qui est leur valeur économique, après réévaluation et dépréciation économique, $E^i(t)$ qui est l'encours d'endettement pour l'emprunt i. Les équations d'évolution du système, dites équations d'état, sont alors les suivantes :

		variables adjointes
	$\dot{\mathfrak{I}}(t) = \gamma(t) + (\beta - p)\mathfrak{I}(t)$	$\psi_{\mathfrak{I}}$
(1)	$\dot{I}(t) = \gamma(t) - \omega I(t)$	ψ_I
	$\dot{E}^i(t) = \varepsilon^i(t) + \int_0^t f^{i\prime}(t-\theta)\varepsilon^i(\theta)\,d\theta$	ψ_{E^i}

[toutes les dérivées sont prises par rapport à t, sauf $f'(.)$ qui signifie évidemment $df(x)/dx$)].

Les paramètres, supposés constants, ont les significations suivantes :

- β : taux d'inflation
- p : taux de dépréciation économique
- ω : taux de l'amortissement comptable (et fiscal)

Il est intéressant de noter que la "durée de vie" moyenne des installations peut être mesurée par :

$$\int_0^\infty tpe^{-pt}\,dt = 1/p$$

De même la durée fiscale moyenne est $1/\omega$.

Ceci veut donc dire que le modèle se comportera en gros comme s'il y avait déclassement économique des installations au bout de p années. Le choix de lois exponentielles simplifie les calculs sans modifier sensiblement les résultats.

Nous choisirons d'**optimiser la valeur nette économique** de l'entreprise à un certain horizon T, soit :

$$(2) \qquad \mathrm{Max}_{t=T}\,[\mathcal{K}(t) = \mathfrak{I}(t) - \textstyle\sum_i\, E^i(t)]$$

Comme l'on sait, d'après la théorie, cette forme de maximisation conduit aux valeurs finales suivantes des variables adjointes, en l'absence d'autres contraintes finales :

$$(2\text{bis}) \qquad \psi_{\mathfrak{I}}(T) = 1 \qquad \psi_I(T) = 0 \qquad \psi_{E^i}(T) = -1$$

Nous supposerons que les immobilisations $\mathfrak{I}(t)$ dégagent à chaque instant une marge semi-nette $g(\mathfrak{I})$, après charges d'exploitation autres qu'amortissements, frais financiers et impôts, telle que :

$$(3) \qquad dg(\mathfrak{I})/d\mathfrak{I} = h = \text{cte}$$

Ceci implique, et nous le vérifierons, une rentabilité constante des investissements élémentaires considérés. Nous ne prétendons pas représenter la réalité par cette hypothèse mais, comme on le verra plus clairement par la suite, introduire un critère de séparation, que l'on pourra faire varier, entre le champ de l'optimisation des investissements et celui du financement. De nombreux auteurs introduisent des fonctions $g(\mathfrak{I})$, supposées concaves $(d^2g/(d\mathfrak{I})^2 \leqslant 0)$, qui permettent de beaux raisonnements mais que l'on est incapable de construire.

Les **contraintes du modèle** sont toutes les égalités ou inégalités limitant le champ des variables d'action et/ou d'état. La principale est une contrainte de trésorerie, à laquelle nous associerons un multiplicateur $\mu(t)$ qui jouera un rôle essentiel dans l'analyse. Elle s'écrit :

$$(4) \qquad \textstyle\sum_i\, \varepsilon^i(t) + \sum_i\, [\int_0^t f^{i\prime}(t-\theta)\varepsilon^i(\theta)d\theta - (1-s)u_iE^i] + (1-s)g(t) - \gamma(t) + s\omega I(t) \geqslant 0$$

où s est le taux fiscal.

Les autres contraintes sont simples :

		multiplicateurs
	$\gamma \geqslant 0$	$\lambda(t)$
(5)	$\varepsilon^i \geqslant 0$	$\eta_i(t)$
	$-\,\varepsilon^i \geqslant -M^i(t)$	$\nu_i(t)$
	$-\sum_i \varepsilon^i \geqslant -M(t)$	$\nu(t)$

La dernière contrainte d'endettement nous paraît plus réaliste que celle traditionnelle portant sur un ratio ; nous ferons la comparaison des deux cas.

L'**hamiltonien** du modèle s'écrit alors[1] ,en y incluant les contraintes :

$$\begin{aligned}(6) \quad \mathcal{H}(t) = {} & \psi_{\mathfrak{I}}[\gamma + (\beta - p)\mathfrak{I}] + \psi_I[\gamma - \omega I] + \textstyle\sum_i \varepsilon^i[\psi_{E^i} + \int_t^T f^{i\prime}(\theta - t)\,\psi_{E^i}(\theta)d\theta] \\ & + \lambda\gamma + \textstyle\sum_i\, [\eta_i\varepsilon^i - \nu_i\varepsilon^i - \nu\varepsilon^i] + \mu[-(1-s)\sum_i\, u_iE^i + (1-s)g - \gamma + s\omega I] \\ & + \textstyle\sum_i\, \varepsilon^i[\int_t^T f^{i\prime}(\theta - t)\,\mu(\theta)d\theta + \mu]\end{aligned}$$

1. Dans une telle formule toutes les variables sont prises à l'instant t sauf spécification autre.

Les **équations de l'optimum** s'obtiennent en dérivant l'hamiltonien par rapport à toutes les variables de commande et toutes les variables d'état :

$$
(7)\quad \left\|\begin{array}{ll}
\psi_{\mathfrak{I}} + \psi_I - \mu + \lambda = 0 & (\gamma) \\
\psi_{E^i} + \mu + \int_t^T f^{i\prime}(\theta - t)[\psi_{E^i}(\theta) + \mu(\theta)]d\theta] - \nu - \nu_i + \eta_i = 0 & (\varepsilon^i) \\
(\beta - p)\psi_{\mathfrak{I}} + (1 - s)\, h\, \mu = -\, \dot{\psi}_{\mathfrak{I}} & (\mathfrak{I}) \\
-\,\omega\, \psi_I + s\, \omega\, \mu = -\, \dot{\psi}_I & (I) \\
-\,(1 - s)\, u_i\, \mu = -\, \dot{\psi}_{E^i} & (E_i)
\end{array}\right.
$$

avec les implications suivantes :

$$
(8)\quad \left\|\begin{array}{l}
\gamma,\ \varepsilon^i,\ -\varepsilon^i + M^i,\ -\sum_i \varepsilon^i + M > 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda,\ \eta_i,\ \nu_i,\ \nu = 0 \\
\gamma,\ \varepsilon^i,\ -\varepsilon^i + M^i,\ -\sum_i \varepsilon^i + M = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda,\ \eta_i,\ \nu_i,\ \nu \geqslant 0 \\
\text{trésorerie} > 0 \quad \longrightarrow \quad \mu = 0 \qquad\qquad \text{trésorerie} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mu \geqslant 0
\end{array}\right.
$$

Interprétation de $\mu(t)$.

$\mu(t)$ est la valeur économique de la contrainte de trésorerie à l'instant t. Ceci veut dire que si nous disposions, par un "don du ciel" à l'instant t, toutes choses égales par ailleurs, d'un Euro supplémentaire de trésorerie, que nous pourrions gérer d'une manière optimale entre t et T, la fonction économique s'en trouverait augmentée de $\mu(t)$ Euros.

La forme des équations, et la signification même de $\mu(t)$ suggère d'écrire ce multiplicateur sous la forme d'un coefficient de capitalisation :

$$
(9) \qquad \mu(t) = e^{\int_t^T j(\tau)d\tau}
$$

Le coefficient devant l'exponentielle est égal à 1, car de toute évidence $\mu(T) = 1$ [ce que l'on peut vérifier avec les équations (7) et (8)]. On obtient donc :

$$
(10) \qquad -\,\frac{\dot{\mu}}{\mu} = j(t)
$$

qui a la signification d'un taux d'actualisation instantané [un Euro qui vaut μ à l'instant t vaut $\mu + \dot{\mu} dt = \mu(1 - j dt)$ s'il n'est disponible qu'à l'instant $t + dt$].

Autres interprétations.

On peut donner une interprétation économique pour chacune des équations (7).

Ainsi la somme des équations (7)($\mathfrak{I}$) et (7)(I) représente dans son premier membre la valeur de la marge supplémentaire après impôts obtenue à l'instant t, augmentée de la valeur de l'économie d'impôts supplémentaire, si l'on dispose à l'instant t d'un Euro supplémentaire à la fois d'immobilisations économiques et comptables. Le second membre est égal à la perte de valeur de la fonction économique, pour cet investissement supplémentaire, en passant de t à $t + dt$.

L'équation (γ) montre que le gain supplémentaire obtenu par cette même variation de $\mathfrak{I}$ et I est égal en phase d'investissement ($\lambda = 0$) à la valeur supplémentaire de la trésorerie correspondante. En revanche, s'il n'est pas intéressant d'investir ce gain est inférieur à sa valeur en trésorerie.

Dans l'interprétation de l'équation (E^i) il faut tenir compte du fait que la valeur ψ_{E^i} est évidemment négative. Au premier membre on trouve l'accroissement (négatif) de fonction économique due au fait d'emprunter un Euro de plus à l'instant t (frais financiers supplémentaires), égal à la perte de valeur de la fonction économique entre t et $t+dt$.

Les critères de choix des emprunts.

Nous supposons pour l'instant la fonction clé $\mu(t)$ connue ; nous verrons par la suite comment la calculer. Nous cherchons à faire le partage entre les emprunts à utiliser au maximum (indice i), l'emprunt éventuel d'équilibre (κ), les emprunts à refuser (k).

Transformons l'équation ($7\ \varepsilon^i$) en intégrant par parties :

$$\int_t^T f^{i\prime}(\theta-t)\,\psi_{E^i}(\theta)d\theta = -\,f^i(T-t) - \psi_{E^i}(t) - \int_t^T (1-s)\,u_i\,f^i(\theta-t)\,\mu(\theta)\,d\theta$$

Tous calculs faits on obtient :

$$(11) \qquad B_i = 1 - \frac{1}{\mu(t)} f^i(T-t) - \int_t^T \left[(1-s)\,u_i\,f^i(\theta-t) - f^{i\prime}(\theta-t)\right]\frac{\mu(\theta)}{\mu(t)}\,d\theta = \frac{\nu+\nu_i-\eta_i}{\mu}$$

Or l'on sait que :

$$\frac{1}{\mu(t)} = e^{-\int_t^T j(\tau)d\tau} \qquad\qquad \frac{\mu(\theta)}{\mu(t)} = e^{-\int_t^\theta j(\tau)d\tau}$$

On reconnaît donc dans le premier membre le bilan actualisé, au taux j, de l'emprunt E^i (un Euro) contracté à l'instant t et dont le montant résiduel en T est $f^i(T-t)$. On a donc :

$$(12) \qquad \left\| \begin{array}{ll} B_i = \dfrac{\nu+\nu_i}{\mu} \geqslant 0 & \text{pour les emprunts saturés,} \\[2ex] B_\kappa = \dfrac{\nu}{\mu} \geqslant 0 & \text{pour l'emprunt d'équilibre,} \\[2ex] B_k = \dfrac{\nu-\eta_k}{\mu} & \text{pour les emprunts refusés.} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$(13) \qquad B_i - B_\kappa = \frac{\nu_i}{\mu} \geqslant 0 \qquad\qquad B_k - B_\kappa = -\,\frac{\eta_k}{\mu} \leqslant 0$$

Le critére de choix des emprunts est donc plus complexe qu'un simple bilan actualisé, a fortiori qu'un simple classement par les taux d'intérêt. Il faut :

– classer les emprunts par bilans actualisés (au taux j de la trésorerie),

– utiliser les emprunts dans cet ordre jusqu'à complète saturation des contraintes (y compris globale),

– le dernier emprunt retenu est l'emprunt d'équilibre, tous les autres sont refusés.

Calcul de $\mu(t)$ en fonction des paramètres du modèle.

Ce calcul met en oeuvre l'ensemble des équations (7) et des conditions (8). Nous nous plaçons évidemment dans la seule phase intéressante, celle comportant la réalisation d'investissements. Donc $\gamma > 0$ et $\lambda = 0$.

En dérivant les trois équations (7) qui ne contiennent pas ψ_{E^i} jusqu'aux dérivées secondes, nous obtenons un système de sept équations linéaires indépendantes en ψ_I , $\psi_\mathfrak{I}$, $\dot\psi_I$, $\dot\psi_\mathfrak{I}$,$\ddot\psi_I$, $\ddot\psi_\mathfrak{I}$. En éliminant ces six inconnues il reste une équation différentielle du second ordre en $\mu(t)$:

$$(14) \qquad \ddot\mu + [(1-s)(h-\omega)+\beta-p]\,\dot\mu - (1-s)\omega(h+\beta-p)\,\mu = 0$$

avec les conditions terminales :

(15) $\mu(T)=1 \qquad \dot{\mu}(T)=-[(1-s)h+s\omega+\beta-p]=-j(T)$

[elles résultent de la relation(7 γ) et de sa dérivée] .

Les solutions de l' équation (14) sont de la forme :

(16) $\mu(t)=c_1\,e^{r_1(T-t)}+c_2\,e^{r_2(T-t)}=e^{\int_t^T j(\theta)d\theta}$

Les conditions finales impliquent :

(17) $c_1+c_2=1 \qquad r_1c_1+r_2c_2=(1-s)h+s\omega+\beta-p=j(T)$

On sait que r_1 et r_2 sont les racines de l'équation du second degré :

(18) $r^2-[(1-s)(h-\omega)+\beta-p]r-(1-s)\omega(h+\beta-p)=0$

Le taux d'actualisation instantané s'écrit :

(19) $j(t)=\frac{c_1\,r_1\,e^{r_1(T-t)}+c_2\,r_2\,e^{r_2(T-t)}}{c_1\,e^{r_1(T-t)}+c_2\,e^{r_2(T-t)}}$

On note que :

(20) $\lim_{T\longrightarrow\infty}\,j(t)=r_1$ quel que soit t

L'analyse numérique montre que cette approximation reste valable dans un intervalle $(0,t)$ assez large si T est suffisamment grand (r_1 étant indépendant de t , il apparaît que la fonction $j(t)$ reste très plate à partir de sa valeur initiale $j(0)$, d'autant plus longtemps que T est plus grand).

Rapprochement avec le calcul de rentabilité des investissements élémentaires.

Un investissement élémentaire de un Euro fait à l'instant t engendre, d'après notre définition de la marge globale, entre θ et $\theta+d\theta$, un flux de marge après impôts égal à :

$$(1-s)\,h\,e^{(\beta-p)(\theta-t)}+s\,\omega\,e^{-\omega(\theta-t)}$$

Le taux de rentabilité ρ de cet investissement est donné par l'équation :

(21) $1=\int_t^\infty\,[(1-s)\,h\,e^{(\beta-p)(\theta-t)}+s\,\omega\,e^{-\omega(\theta-t)}]e^{-\rho(\theta-t)}d\theta$

Après intégration on obtient l'équation :

(22) $\rho^2-[(1-s)(h-\omega)+\beta-p]\,\rho-(1-s)\omega(h+\beta-p)=0$

qui s'identifie strictement avec l'équation (18). On peut donc poser :

(23) $r_1=\rho_1 \qquad r_2=\rho_2$

Seule la racine positive ρ_1 a la signification d'un taux de rentabilité.

Nous pouvons dire que le taux d'actualisation $j(t)$ de notre modèle dynamique s'identifie rigoureusement, si T tend vers l'infini, et de manière approchée si T est grand par rapport à t, au taux de rentabilité des investissements élémentaires :

(24) $j(t)\simeq\rho_1=r_1$

Rapprochement avec un modèle de croissance.

Il est intéressant d'essayer de préciser quel taux de croissance est permis à partir d'un niveau de marge donné. A cet effet calculons, à partir d'un agrégat d'investissements élémentaires faits à divers époques (depuis $-\infty$ pour simplifier les calculs ...), quelle marge h serait nécessaire en régime continu pour assurer une croissance physique régulière de taux k en régime d'autofinancement intégral. Ceci ne répond pas parfaitement à la question, puisque nous empruntons, mais nous permet d'étalonner en quelque sorte notre notion de marge.

Un investissement unité (en capacité physique) réalisé à l'instant t coûte $e^{\beta t}$ (à un facteur prix près), et dégage en θ un flux de marge après impôts égal à :

$$(1-s)\,e^{\beta t}\,e^{(\beta-p)(\theta-t)}+s\omega\,e^{\beta t}\,e^{-\omega(\theta-t)}$$

Le flux des capacités est, à l'instant θ :

$$dc(\theta)=k\,c_0\,e^{kt}\,d\theta$$

La contrainte d'autofinancement à 100% implique :

$$e^{\beta\theta}\,k\,c_0\,e^{kt}=\int_{-\infty}^{\theta}\,[(1-s)\,e^{\beta t}\,e^{(\beta-p)(\theta-t)}+s\omega\,e^{\beta t}\,e^{-\omega(\theta-t)}]dt$$

Tous calculs faits on obtient l'équation définissant h :

(25) $$\frac{(1-s)h}{p+k}+\frac{s\omega}{\omega+k+\beta}=1$$

or l'équation (18) permettant de calculer r peut être mise sous la forme :

(26) $$\frac{(1-s)h}{p-\beta+r}+\frac{s\omega}{\omega+r}=1$$

On voit immédiatement que ces deux équations s'identifient rigoureusement si l'on pose :

(27) $$k+\beta=r_1\simeq j(t)$$

Ceci veut donc dire que si a contrario nous nous donnons h (c'est l'une des hypothèses de notre étude), nous pouvons, par le biais du calcul de r_1, savoir quel est le taux de croissance physique k qu'une telle marge pourrait assurer en autofinancement intégral.

Résultats numériques.

Nous donnons ici quelques résultats correspondant à des situations contrastées.

Nous avons retenu p = 0,10 , ω = 0,12 , T = 10 dans tous les cas , ainsi que trois niveaux d'inflation (forte, moyenne, faible), deux taux fiscaux, trois niveaux de marge correspondant à une croissance nulle ou plus ou moins soutenue. Tout ceci est résumé dans le tableau ci-dessous :

h	β	s	r_1	$j(0)$	$j(T)$	k	$(1-s)(\beta+0,03)$
0,200	0,10	0,5	0,131	0,134	0,160	0,031	0,065
0,200	0,05	0,5	0,090	0,093	0,110	0,040	0,040
0,200	0,02	0,5	0,067	0,069	0,080	0,047	0,025
0,150	0,02	0,5	0,040	0,043	0,055	0,020	0,025
0,110	0,02	0,5	0,018	0,022	0,035	-0,002	0,025
0,110	0,02	0,3	0,023	0,025	0,033	0,003	0,035
0,200	0,02	0,3	0,089	0,090	0,096	0,069	0,035
0,120	0,10	0,3	0,100	0,103	0,120	0,000	0,091
0,215	0,10	0,5	0,140	0,142	0,168	0,040	0,065
0,200	0,05	0,5	0,090	0,093	0,110	0,040	0,040
0,187	0,02	0,5	0,060	0,063	0,074	0,040	0,025

Tableau 1.

De nombreuses remarques peuvent être faites :

– Tout d'abord on vérifie que dans tous les cas de figure r_1 est très proche de $j(0)$, d'autant plus que le taux fiscal est moins élevé (l'écart serait nul hors fiscalité).

– Le taux $j(T)$ est strictement indépendant de T, le taux $j(0)$ l'est quasiment.

– Les taux $j(T)$ et $j(0)$ et l'écart entre eux, sont des éléments très sensibles au taux d'inflation.

– A marge et taux d'inflation donnés, et en situation de croissance, le taux de croissance est très sensible au taux fiscal. Il est facile de comprendre sur un exemple simple de ce type comment un pays peut se handicaper en pratiquant dans un environnement international ouvert une fiscalité trop lourde par rapport à ses voisins. En revanche en cas de stagnation l'incidence de la fiscalité est faible.

– Les taux d'actualisation générés par le modèle sont, sauf en situation de stagnation, très supérieurs à ceux correspondant à un taux marginal après impôts d'un emprunt financier, que l'on prendra par exemple égal avant fiscalité au taux d'inflation majoré de 3 ou 4 points. Nous insistons sur ce point, car il y a 20 ans et plus il était très à la mode de "démontrer", soit en coin de table, soit en contrôle optimal (!), que l'entreprise devait retenir comme taux d'actualisation ce taux financier après impôts. Ces raisonnements péchaient tous par le même défaut : ils ne tenaient aucun compte de contraintes financières, ni de l'objectif de croissance de l'entreprise.

– Pour un même taux de croissance, les taux d'actualisation sont nettement plus sensibles à la variation de l'inflation que les marges nécessaires pour obtenir cette croissance. Cette conclusion est importante pour les études pratiques : on risque moins de se tromper en choisissant un objectif de marge qu'un objectif de taux de rentabilité.

Contraintes d'endettement : retour au classicisme.

Dans les traités financiers on nous explique que l'entreprise doit respecter une contrainte globale d'endettement du type :

$$(28) \qquad -\sum_i E^i(t) + zI(t) \geqslant 0 \qquad\qquad \textit{multiplicateur} \quad \zeta$$

Nous substituons cette contrainte à la contrainte globale des équations (5).

La théorie nous dit que ζ doit dans l'hamiltonien être associé à l'expression dérivée de (28) :

$$(29) \qquad -\sum_i \dot{E}^i(t) + z\,\dot{I}(t) = -\sum_i \left[\varepsilon^i + \int_0^t f^{i\prime}(t-\theta)\,\varepsilon^i(\theta)\,d\theta\right] + z\gamma - z\omega I$$

on a l'implication :

$$-\sum_i E^i + zI > 0 \quad\longrightarrow\quad \dot{\zeta} = 0$$

$\zeta(t)$ n'est déterminé qu'à une constante près. En tout point de la trajectoire $\dot{\zeta} \leqslant 0$. Nous choisissons $\zeta(T) = 0$, ce qui implique donc $\zeta(t) \geqslant 0$.

Les équations de l'optimum deviennent alors :

$$(30) \qquad \left\| \begin{array}{ll} \psi_{\mathfrak{I}} + \psi_I - \mu + \lambda + z\zeta = 0 & (\gamma) \\ \psi_{E^i} + \mu - \zeta + \int_t^T f^{i\prime}(\theta - t)\,[\psi_{E^i}(\theta) + \mu(\theta) - \zeta(\theta)]d\theta - \nu_i + \eta_i = 0 & (\varepsilon^i) \\ (\beta - p)\psi_{\mathfrak{I}} + (1-s)\,h\,\mu = -\,\dot{\psi}_{\mathfrak{I}} & (\mathfrak{I}) \\ -\,\omega\,\psi_I + s\,\omega\,\mu - z\omega\zeta = -\,\dot{\psi}_I & (I) \\ -\,(1-s)\,u_i\,\mu = -\,\dot{\psi}_{E^i} & (E_i) \end{array} \right.$$

Pour l'interprétation de ces équations il faut noter que l'effet économique d'une disponibilité supplémentaire en t d'une unité de $\mathfrak{I}$, de I, de E^i, est donné en notation symbolique par :

$$(31) \qquad \nabla_{\mathfrak{I}(t)}\mathcal{K} = \psi_{\mathfrak{I}} \qquad\qquad \nabla_{I(t)}\mathcal{K} = \psi_I + z\zeta \qquad\qquad \nabla_{E^i(t)}\mathcal{K} = \psi_{E^i} - \zeta$$

Supposons qu'en fonctionnement optimal l'endettement global soit toujours saturé et qu'il y ait toujours investissement ($\gamma > 0$; $\lambda = 0$). L'équation (30 ε^{κ}) s'écrit aussi, pour l'emprunt d'équilibre, et en trajectoire finale :

$$-\frac{d}{dt}\int_t^T f^\kappa(\theta - t)\,[\psi_{E^\kappa}(\theta) + \mu(\theta) - \zeta(\theta)]d\theta = 0$$

Donc, puisque t peut atteindre T :

$$\int_t^T f^\kappa(\theta - t)\,[\psi_{E^\kappa}(\theta) + \mu(\theta) - \zeta(\theta)]d\theta = \text{Cte} = 0$$

(32) $$\psi_{E^\kappa}(\theta) + \mu(\theta) - \zeta(\theta) = 0$$

Le coût d'un Euro supplémentaire d'emprunt d'équilibre, du point de vue de la fonction économique, soit $[-\psi_{E^\kappa}(t) + \zeta(t)]$ est égale à $\mu(t)$, c'est à dire à la valeur de la trésorerie à cet instant.

Pour un emprunt quelconque on a :

(33) $$-\dot{\psi}_{E^i} + \dot{\zeta} = -(1-s)\,u_i\,\mu + \dot{\zeta} \leqslant 0$$

Le coût d'un emprunt quelconque décroît en fonction de la date de mise à disposition.

Par une transformation analogue à celle du cas de base on peut aussi écrire l'équation ($30\ \varepsilon^i$) pour un emprunt saturé :

(36) $$B_i = 1 - \frac{1}{\mu(t)} f^i(T-t) - \int_t^T\ [(1-s)\,u_i\,f^i(\theta - t) - f^{i\prime}(\theta - t)]\frac{\mu(\theta)}{\mu(t)}\,d\theta =$$

$$= -\int_t^T f^i(\theta - t)\,\dot{\zeta}(\theta - t)d\theta\ + \nu_i(t) \geqslant 0$$

De même pour l'emprunt d'équilibre B_κ. En revanche on ne connaît pas le signe de B_k, bénéfice actualisé d'un emprunt non utilisé. De plus on ne peut pas comparer simplement ces éléments à cause des intégrales $\int f\dot{\zeta}d\theta$. Il faut donc calculer directement les multiplicateurs η.

Calculons d'abord μ et $\dot{\zeta}$.

Compte tenu de la relation (32), du fait aussi qu'à l'optimum on a

(37) $$\psi_{E^\kappa}(T) - \zeta(T) = -1$$

et du choix de $\zeta(T) = 0$, on a donc :

(38) $$\psi_{E^\kappa}(T) = -1 \qquad\qquad \mu(T) = 1$$

En dérivant (37) et en utilisant ($30\ E^\kappa$) on obtient :

(39) $$\left\|\begin{aligned} &\dot{\mu} + (1-s)u_\kappa\,\mu = \dot{\zeta} \\ &\ddot{\mu} + (1-s)u_\kappa\,\dot{\mu} = \ddot{\zeta} \end{aligned}\right.$$

D'autre part nous utilisons les équations suivantes déduites de (30) :

(40) $$\left\|\begin{aligned} &\psi_{\mathfrak{Z}} + \psi_I - \mu + z\zeta = 0 \\ &\dot{\psi}_{\mathfrak{Z}} + \dot{\psi}_I - \dot{\mu} + z\,\dot{\zeta} = 0 \\ &\dot{\psi}_{\mathfrak{Z}} + (\beta - p)\psi_{\mathfrak{Z}} + (1-s)\,h\,\mu = 0 \\ &\dot{\psi}_I\ - \omega\,\psi_I + s\,\omega\,\mu - z\omega\zeta = 0 \end{aligned}\right.$$

en éliminant $\dot{\psi}_{\mathfrak{Z}}$, $\dot{\psi}_I$, et ψ_I entre ces équations puis en dérivant une nouvelle fois, nous obtenons :

(41) $$\left\|\begin{aligned} &\dot{\mu} - z\dot{\zeta} + (\omega + \beta - p)\psi_{\mathfrak{Z}} + (1-s)(h - \omega)\,\mu = 0 \\ &\ddot{\mu} - z\ddot{\zeta} + (\omega + \beta - p)\dot{\psi}_{\mathfrak{Z}} + (1-s)(h - \omega)\,\dot{\mu} = 0 \end{aligned}\right.$$

Entre les 8 équations (39), (40), (41), nous pouvons éliminer les 7 inconnues autres que μ et ses dérivées. Nous obtenons une équation différentielle du second ordre analogue à (14) :

$$(42) \qquad \left\| \begin{array}{l} (1-z)\ddot{\mu}+\{(1-s)(h-\omega)+\beta-p-z[(1-s)u_\kappa+\beta-p]\}\dot{\mu} \\ \qquad -[(1-s)\omega(h+\beta-p)+z(1-s)u_\kappa(\beta-p)]\mu=0 \end{array} \right.$$

assortie des conditions finales, issues de (40) :

$$(43) \qquad \mu(T)=1 \qquad \dot{\mu}(T)=-\frac{1}{1-z}[(1-s)h+s\omega+\beta-p-z(1-s)u_\kappa]=-j(T)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$(44) \qquad \mu(t)=c_1\,e^{r_1(T-t)}+c_2\,e^{r_2(T-t)}=e^{\int_t^T j(\theta)d\theta}$$

Les conditions finales impliquent :

$$(45) \qquad c_1+c_2=1 \qquad r_1c_1+r_2c_2=\frac{1}{1-z}[(1-s)h+s\omega+\beta-p-z(1-s)u_\kappa]=j(T)$$

On sait que r_1 et r_2 sont les racines de l'équation du second degré :

$$(46) \qquad \begin{array}{l} (1-z)r^2-\{(1-s)(h-\omega)+\beta-p-z[(1-s)u_\kappa+\beta-p]\}r \\ \qquad -[(1-s)\omega(h+\beta-p)+z(1-s)u_\kappa(\beta-p)]=0 \end{array}$$

D'après (32) nous avons :

$$(47) \qquad \dot{\zeta}=\dot{\psi}_{E^\kappa}+\dot{\mu}=(1-s)u_\kappa\,\mu+\dot{\mu}=\mu[(1-s)u_\kappa-j]$$

Une **condition de validité de l'évolution optimale** étudiée est donc :

$$(48) \qquad j(t)\geqslant(1-s)u_\kappa$$

Par diverses intégrations par parties effectuées sur l'équation (30 ε^i) on établit enfin les relations :

$$(49) \qquad \left\| \begin{array}{l} \nu_i(t)=\int_t^T\,(1-s)(u_\kappa-u_i)f^i(\theta-t)\mu(\theta)d\theta \\ -\eta_i(t)=\int_t^T\,(1-s)(u_\kappa-u_k)f^k(\theta-t)\mu(\theta)d\theta \end{array} \right.$$

ces relations impliquent :

$$(50) \qquad u_k\geqslant u_\kappa\geqslant u_i$$

La règle de choix est donc élémentaire, basée sur la seule considération des taux d'intérêt. Il suffit de classer les emprunts dans l'ordre croissant des taux et de les utiliser jusqu'à saturation de la contrainte globale d'endettement. Par rapport aux idées classiques il faut noter toutefois que le taux d'actualisation de l'entreprise est en général non pas égal mais supérieur au taux marginal après impôts de l'emprunt d'équilibre.

Il est instructif d'écrire, d'après (43) :

$$(51) \qquad 1-s)h+s\omega+\beta-p=(1-z)j(T)+z(1-s)u_\kappa$$

Si l'on considère $j(T)$ comme un coût implicite des fonds propres, du type "coût d'opportunité", on peut dire :

marge nette après impôts = coût pondéré du capital

La théorie classique montre le bout de l'oreille, mais ici de manière cohérente avec les hypothèses du modèle.

L'examen de **résultats numériques** fait apparaître quelques différences marquantes avec le cas de base :

h	β	s	r_1	$j(0)$	$j(T)$	$(1-s)(\beta+0,03)$
0,200	0,10	0,5	0,041	0,081	0,255	0,065
0,200	0,05	0,5	0,030	0,069	0,180	0,040
0,200	0,02	0,5	0,025	0,060	0,135	0,025
0,150	0,02	0,5	0,013	0,045	0,085	0,025
0,110	0,02	0,5	0,003	0,028	0,035	0,025
0,110	0,02	0,3	0,004	0,021	0,031	0,035
0,200	0,02	0,3	0,033	0,067	0,157	0,035
0,120	0,10	0,3	0,026	0,061	0,149	0,091
0,215	0,10	0,5	0,044	0,083	0,270	0,065
0,200	0,05	0,5	0,030	0,069	0,180	0,040
0,187	0,02	0,5	0,022	0,057	0,122	0,025

Tableau 2.

– r_1 n'est plus une approximation valable pour $j(0)$.

– Pour les mêmes valeurs des paramètres $j(0)$ est nettement plus faible, et $j(T)$ nettement plus fort que dans le cas de base.

– Il y a toujours un écart sensible entre $j(0)$ et le taux financier après impôts sauf dans les cas de faible marge où l'on atteint la limite de validité de cette évolution optimale.

La comparaison chiffrée du cas de base et de la variante a cependant une portée limitée tant que l'on n'entre pas plus dans le détail de cas concrets, où il faudrait notamment se donner des hypothèses précises sur les contraintes $M(t)$. Son mérite est simplement de mettre en évidence **l'extrême sensibilité du taux d'actualisation instantané à la nature des contraintes financières** retenues. Ceci rend caduc tout débat sur ce sujet faisant abstraction des dites contraintes.

Dividendes.

On pourrait nous reprocher d'avoir construit une entreprise sans dividendes (ni augmentations de capital). Mais cette question nous paraît être d'une autre nature. On pourrait dire que dans l'optique, certes théorique, d'une bourse complètement rationnelle, le fait de rémunérer l'actionnaire par une distribution de dividendes ou non devrait être neutre. On en est évidemment loin, compte tenu de la fiscalité, et du fait que les taux d'utilité individuels peuvent être très différents du taux j de l'entreprise.

Disons simplement que nous n'avons pas fait un choix politique en centrant le débat uniquement sur l'optimisation de l'endettement.

Si l'on s'imposait tous les ans la distribution d'un dividende $\alpha\mathfrak{I}$ toutes les conclusions énoncées resteraient vraies en remplaçant h par $h - \alpha/(1-s)$ dans les équations. Autrement dit pour obtenir le même taux de croissance il faudrait augmenter la marge de $\alpha/(1-s)$.

Conclusion.

Les méthodes modernes d'optimisation sous contraintes, du type contrôle optimal ou programmation dynamique sont très généralement difficiles à mettre en oeuvre pour des choix détaillés. Sur le plan conceptuel en revanche ces outils présentent un énorme intérêt. Ainsi nous avons pu préciser des critères de choix corrects en matière d'endettement, avec des hypothèses variées de contraintes et de paramètres économiques, dans un contexte où le taux d'actualisation de l'entreprise est supposé fixé par un choix stratégique fait a priori.

Nous ne saurions conclure sans indiquer que l'impulsion initiale pour la conception de ce modèle nous a été fournie il y a bien longtemps par un article de M.Albouy dans R.A.I.R.O., recherche opérationnelle (février 1976), vol.10, n°2 (p.5 à 36) "Théorie financière de la firme ... ". Nous avons alors cherché à traiter partiellement le problème, mais d'une manière plus souple en variables continues, et surtout en prenant en compte des lois de remboursement très générales. Ceci nous a obligé à réfléchir à la théorie du contrôle optimal avec prise en compte d'éléments héréditaires, en variables continues. Le fait d'avoir pu retrouver sur ce modèle des critères économiques classiques de type bénéfice actualisé, et donc à valider sur un cas concret l'extension de la théorie, a constitué l'un des intérêts majeurs de ce travail.

G.Ringeisen

août 2004